7

Matemática y Datos Tomo 2 Guía metodológica

GOBIERNO DE
EL SALVADOR

Matemática y Datos

Guía metodológica

Tomo 2

GOBIERNO DE
EL SALVADOR

Matemática y Datos

Guía metodológica

Tomo 2

Equipo técnico autoral del Ministerio de Educación
Ana Ester Argueta Aranda
César Omar Gómez Juárez
Diana Marcela Herrera Polanco
Erick Amílcar Muñoz Deras
Francisco Antonio Mejía Ramos
Norma Elizabeth Lemus Martínez
Reina Maritza Pleitez Vásquez
Salvador Enrique Rodríguez Hernández

Jefe del Departamento de Materiales Educativos
Julio Adolfo Castellanos

Diseño y revisión de diagramación
Francisco René Burgos Álvarez
Judith Samanta Romero de Ciudad Real

Corrección de estilo
Ana Esmeralda Quijada Cárdenas
Marlene Elizabeth Rodas Rosales
Mónica Marlene Martínez Contreras

Cooperación Técnica de Japón a través de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA).

372.7
M425 Matemática 7 [recurso electrónico] : guía metodológica: tomo 2
/ Ana Ester Argueta,
Aranda ... [et al] ;
Diagramación Francisco René Burgos Álvarez, Judith Samanta
Romero de Ciudad Real,. -- 2ª. ed.. -
San Salvador, El salv. : Ministerio de Educación (MINED), 2020.

s/v 1 recurso electrónico, (224 p. ; ilus. ; 28 cm. – (Esmate)
Datos electrónicos (1 archivo : pdf, 14.21 mb) . -- http://www.
mined.gob.sv

ISBN 978-99961-355-5-2 (E-Book)

1. Matemáticas-Libros de texto. 2. Matemáticas-Enseñanza --
Guías I.
Argueta Aranda, Ana Ester, coaut.
II. Título.
BINA/jmh

Apreciables docentes:

Este nuevo ciclo escolar representa una gran oportunidad para elevar la formación integral de nuestros estudiantes, en este caso, en la asignatura de Matemática.

El programa que reciben ha sido creado para ser su mejor aliado pedagógico y didáctico, con el objetivo de que sus estudiantes reciban aprendizajes de calidad en espacios seguros, integrales y motivadores, como parte de nuestro compromiso con la transformación educativa.

En las páginas de este documento encontrarán orientaciones concretas para el desarrollo de las clases del fascinante mundo de los números y las operaciones; las figuras geométricas, sus propiedades y las medidas; así como la interpretación y representación de los datos.

Cada tema ayudará a que sus estudiantes descubran nuevas ideas y pongan en práctica sus habilidades, así como motivarlos a aprender con entusiasmo y ayudarlos a alcanzar los mejores resultados académicos.

Por supuesto, su mediación como educadores desempeña un rol fundamental en la promoción de valores, como el respeto, la colaboración, la responsabilidad y la disciplina.

Si bien el camino de la enseñanza está lleno de retos, también es un camino de grandes satisfacciones. Los invito a recorrerlo con motivación y compromiso, ya que ustedes son los que preparan a las futuras generaciones que construirán el nuevo El Salvador que merecemos.

Confío plenamente en que su dedicación y liderazgo harán una diferencia profunda en la vida de sus estudiantes cada día desde las aulas.

Atentamente:

Karla Edith Trigueros
Mayor y Doctora
Ministra de Educación, Ciencia y Tecnología

Índice

Unidad 5

Unidad 6

Unidad 7

Unidad 8

Unidad 5. Ecuaciones de primer grado

Competencias de la Unidad

– Conocer las propiedades de una igualdad matemática y utilizarlas para la resolución de una ecuación de primer grado.
– Identificar por iniciativa propia situaciones del entorno en las que a través del planteamiento y solución de una ecuación de primer grado se pueda dar respuesta a una interrogante que se presente.

Relación y desarrollo

Séptimo grado

Unidad 5: Ecuaciones de primer grado
- Igualdad de expresiones matemáticas
- Ecuación de primer grado
- Aplicación de ecuaciones de primer grado

Octavo grado

Unidad 2: Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas
- Métodos para resolver ecuaciones de primer grado con dos incógnitas
- Aplicación de las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Noveno grado

Unidad 3: Ecuación cuadrática
- Ecuación cuadrática
- Aplicaciones de la ecuación cuadrática

Unidad 4: Función cuadrática de la forma $y = ax^2 + c$
- Función $y = ax^2$
- Función $y = ax^2 + c$

Primer año de bachillerato

Unidad 2: Operaciones con polinomios y números complejos
- Productos notables y factorización
- División de polinomios
- Ecuación cuadrática y números complejos

Plan de estudio de la Unidad

Lección	Horas	Clases
1. Igualdad de expresiones matemáticas	1	1. Igualdad de dos expresiones numéricas
	1	2. Igualdad de dos expresiones algebraicas
2. Ecuación de primer grado	1	1. Solución de una ecuación
	1	2. Propiedades de la igualdad
	1	3. Solución de ecuaciones aplicando la propiedad 1 de las igualdades
	1	4. Solución de ecuaciones aplicando la propiedad 2 de las igualdades
	1	5. Método de transposición de términos
	1	6. Solución de ecuaciones aplicando la propiedad 3 de las igualdades
	1	7. Solución de ecuaciones aplicando la propiedad 4 de las igualdades
	1	8. Solución de ecuaciones aplicando más de una propiedad
	1	9. Solución de ecuaciones con incógnitas en ambos miembros
	1	10. Practica lo aprendido
	1	11. Solución de ecuaciones con signos de agrupación
	1	12. Ecuaciones con solución fraccionaria y decimal
	1	13. Ecuaciones con términos y coeficientes decimales
	1	14. Ecuaciones con términos y coeficientes fraccionarios
	1	15. Practica lo aprendido

Lección	Horas	Clases
3. Aplicación de ecuaciones de primer grado	1	1. Aplicación de ecuaciones utilizando una propiedad de las igualdades
	1	2. Aplicación de ecuaciones utilizando más de una propiedad de las igualdades
	1	3. Aplicación de ecuaciones que incluyen una incógnita en términos de otra
	1	4. Aplicación de ecuaciones con variables en ambos miembros
	1	5. Aplicaciones en situaciones de distancia, velocidad y tiempo
	1	6. Aplicaciones en situaciones de proporcionalidad directa, parte 1
	1	7. Aplicaciones en situaciones de proporcionalidad directa, parte 2
	1	8. Aplicaciones en situaciones de proporcionalidad directa, parte 3
	1	Prueba de la Unidad 5
	1	Prueba del segundo trimestre

25 horas clase + prueba de la Unidad 5 + prueba del segundo trimestre

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Igualdad de expresiones matemáticas
Plantear la relación de dos expresiones matemáticas que representan la misma cantidad, utilizando para ello el símbolo de igualdad: =.

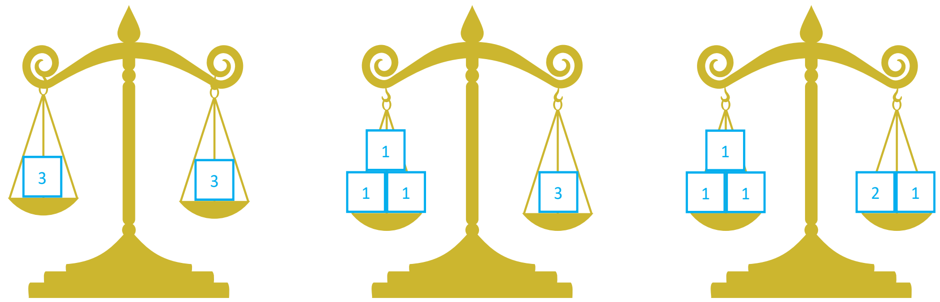
Lección 2: Ecuación de primer grado
Abordar la **solución de una ecuación** y el uso de las propiedades de una **igualdad matemática** para determinar la solución de una ecuación. En esta lección se estudiarán ecuaciones con características especiales como las que incluyen signos de agrupación, las que tienen solución fraccionaria o decimal, con términos y coeficientes decimales y por último con términos y coeficientes fraccionarios.

Lección 3: Aplicación de ecuaciones de primer grado
Esta lección es de suma importancia porque plantea la ecuación de primer grado como una herramienta para resolver problemas cuya solución es difícil de encontrar sin el uso de una incógnita. En ese sentido, durante la clase hay que hacer énfasis no solo en la manera de resolver una ecuación sino también en la manera de cómo plantear una ecuación para una determinada situación.

1.1 Igualdad de dos expresiones numéricas

P

Observa las siguientes balanzas y escribe las igualdades representadas en cada una de ellas:



Balanza 1 Balanza 2 Balanza 3

S

3 = 3 1 + 1 + 1 = 3 1 + 1 + 1 = 2 + 1

C

El signo (=) es un símbolo matemático utilizado para representar la igualdad de dos expresiones numéricas.

E

Llena los espacios en blanco para que se cumpla la igualdad.

a) 6 + 1 = 5 + __ b) 8 − __ = 5 c) 2 + __ = 3 + __ d) 8 − __ = 4 + __

Solución.

a) 6 + 1 = 5 + 2 b) 8 − 3 = 5 c) 2 + 3 = 3 + 2 d) 8 − 3 = 4 + 1

En los literales c) y d) puede haber más de una solución, por lo que la presentada es solo una opción.

1. Llena los espacios en blanco para que se cumpla la igualdad.

a) 7 + 3 = 10 b) 7 + 2 = 9 c) 8 + 2 = 4 + 6

d) 12 − 7 = 5 e) 20 − 5 = 15 f) 3 − 1 = 5 − 3

2. Llena los recuadros con un número para que se cumpla la igualdad.

a) $\boxed{5}$ = 5 b) $\boxed{28}$ − 13 = 15 c) $\boxed{20}$ − $\boxed{3}$ = 17 d) $\boxed{15}$ − $\boxed{4}$ = 3 + 8

e) $\boxed{14}$ − $\boxed{2}$ = 7 + 5 f) $\boxed{21}$ − $\boxed{7}$ = 8 + 6 g) $\boxed{17}$ − $\boxed{1}$ = 9 + 7 h) $\boxed{20}$ − $\boxed{2}$ = 9 + 9

88

Indicador de logro

1.1 Expresa igualdades de dos expresiones numéricas.

Secuencia

En la clase 3.1 de la Unidad 4 se trabajó por primera vez el concepto de una igualdad matemática, así que los estudiantes ya tienen una idea de las igualdades de expresiones matemáticas. Por lo tanto, esta clase estará dedicada solo al planteamiento de igualdades de expresiones numéricas.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Plantear igualdades numéricas a partir de la intuición.

Ⓒ Establecer que el símbolo (=) se utiliza para indicar la relación de dos expresiones numéricas que representan la misma cantidad.

Al desarrollar la sección de problemas, hacer énfasis en que para los literales del c) al h) la solución planteada no es la única.

Fecha: **U5 1.1**

Ⓟ Observa las siguientes balanzas y escribe las igualdades representadas en cada una de ellas:

Balanza 1 Balanza 2 Balanza 3

Ⓢ B1. $3 = 3$ B2. $1 + 1 + 1 = 3$ B3. $1 + 1 + 1 = 2 + 1$

Ⓔ a) $6 + 1 = 5 + 2$ b) $8 - 3 = 5$
c) $2 + 3 = 3 + 2$ d) $8 - 3 = 4 + 1$

Ⓡ 1. a) 3 b) 7, 2 c) 2, 6
d) 7 e) 5 f) 1, 3

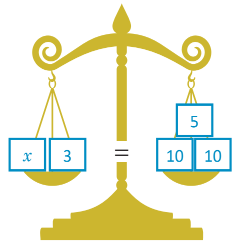
2. a) 5 b) 28 c) 20, 3 d) 15, 4
e) 14, 2 f) 21, 7 g) 17, 1 h) 20, 2

Tarea: página 90 del Cuaderno de Ejercicios.

1.2 Igualdad de dos expresiones algebraicas

P

Representa la igualdad matemática de las expresiones que están en los platillos de la siguiente balanza.



S

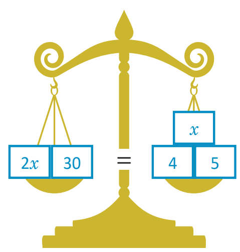
$x + 3 = 10 + 10 + 5$

C

Para escribir simbólicamente que dos expresiones algebraicas representan el mismo valor también se usa el signo (=).

E

Representa la igualdad matemática de las expresiones que están en los platillos de la siguiente balanza.



Solución.

$2x + 30 = x + 4 + 5$

Representa la igualdad matemática de las expresiones que están en las siguientes balanzas:

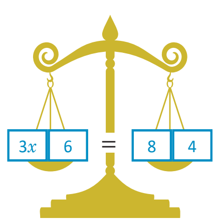
a)

$x + 8 = 10$

b)

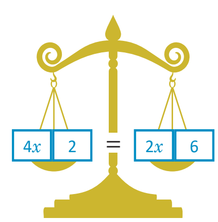
$4x + 3 = 39$

c)



$3x + 6 = 8 + 4$

d)



$4x + 2 = 2x + 6$

Unidad 5

89

Indicador de logro

1.2 Expresa igualdades de dos expresiones algebraicas.

Secuencia

Dado que en la clase anterior solo se plantearon igualdades de expresiones numéricas, para la clase de hoy se ampliará el planteamiento de una igualdad que incluye expresiones algebraicas.

Propósito

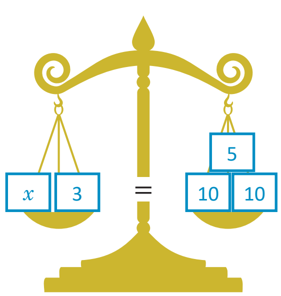
Ⓟ, Ⓢ Plantear igualdades que incluyen expresiones algebraicas a partir de la práctica de la clase anterior.

Ⓒ Establecer que el símbolo (=) se utiliza para indicar la relación de dos expresiones algebraicas que representan la misma cantidad.

Se pueden utilizar carteles con la ilustración de las balanzas para el Ⓟ y el Ⓔ.

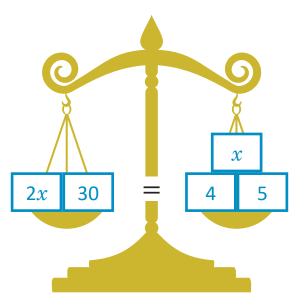
Fecha: **U5 1.2**

Ⓟ Representa la igualdad matemática de las expresiones que están en los platillos de la siguiente balanza.



Ⓢ $x + 3 = 10 + 10 + 5$

Ⓔ



$2x + 30 = x + 4 + 5$

Ⓡ a) $x + 8 = 10$ b) $4x + 3 = 39$

c) $3x + 6 = 8 + 4$ d) $4x + 2 = 2x + 6$

Tarea: página 91 del Cuaderno de Ejercicios.

2.1 Solución de una ecuación

P

Una persona llega a la ventanilla de un banco para cobrar un cheque de 470 dólares. Después de recibir 300 dólares en billetes de 100, la cajera le informa que solo tiene billetes de 5 dólares. ¿Cuántos billetes de 5 dólares recibirá?

Si se usa x para representar el número total de billetes de \$5, se puede formar una igualdad usando números y una variable. Como hay que igualar el total de billetes de 100 y 5 dólares con 470 dólares, se puede formar la siguiente igualdad: $5x + 300 = 470$.

Representa el total de dinero con billetes de \$5.

Para encontrar la cantidad de billetes de 5 dólares, se necesita conocer el valor de x en la igualdad: $5x + 300 = 470$.

S

Para encontrar el valor de x se puede sustituir algunos valores aproximados y al efectuar la operación se debe verificar si cumple con el valor que se encuentra en el miembro derecho (470).

Valor de x	Miembro izquierdo $5x + 300$	Resultado del miembro izquierdo
si $x = 31$	$5 \times 31 + 300$	455
si $x = 32$	$5 \times 32 + 300$	460
si $x = 33$	$5 \times 33 + 300$	465
si $x = 34$	$5 \times 34 + 300$	470
si $x = 35$	$5 \times 35 + 300$	475
si $x = 36$	$5 \times 36 + 300$	480

Cuando el valor de x es 34, el valor que se tiene en el miembro izquierdo es igual al valor del miembro derecho, por tanto, se cumple la igualdad matemática establecida en la ecuación. Con lo que se concluye que se recibirán 34 billetes de 5 dólares.

C

La igualdad de dos expresiones matemáticas que incluye una variable se llama **ecuación.** En una ecuación al valor desconocido que se representa por una variable se llama **incógnita.** El valor numérico de la incógnita que cumple con la igualdad se llama solución de la ecuación y al proceso para encontrarla se le llama **resolver la ecuación.**

¿Cuál o cuáles de las siguientes ecuaciones tienen como solución el valor de 5? (Sustituye el valor)

a) $2x + 3 = 11$

$2 \times 5 + 3 = 11$

$10 + 3 = 11$

$13 \neq 11$

b) $3x - 8 = 7$

5 es solución de la ecuación

c) $8x + 9 = 17$

5 no es solución de la ecuación

d) $4x - 8 = 4$

5 no es solución de la ecuación

Por tanto, no es solución de la ecuación del literal a.

Indicador de logro

2.1 Identifica si un valor es solución de una ecuación.

Secuencia

Los estudiantes ya se han familiarizado con el concepto de igualdad matemática (planteamiento de la relación de dos expresiones numéricas o algebraicas que representan la misma cantidad), se aprovecha esta clase para la introducción de los términos **ecuación**, **incógnita**, **solución** y **resolución de una ecuación**. Los términos de miembro izquierdo y miembro derecho ya se abordaron en la clase 3.1 de la Unidad 4, en caso de que los estudiantes presenten dificultades para recordarlos, se les puede orientar para que revisen la clase antes mencionada.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Determinar el valor de la incógnita utilizando tablas; es decir, en este caso se busca que el estudiante determine el número de billetes a través del ensayo y error, organizando los resultados en una tabla.

Ⓒ Establecer el significado de ecuación, incógnita y solución de una ecuación. Al mismo tiempo se establece que al proceso que se realiza para determinar la solución de una ecuación se le llama **resolver la ecuación**.

Solución de algunos ítems:

b) $3x - 8 = 7$
$3 \times 5 - 8 = 7$
$15 - 8 = 7$
$7 = 7$

c) $8x + 9 = 17$
$8 \times 5 + 9 = 17$
$40 + 9 = 17$
$49 \neq 17$

Por tanto, 5 es solución de la ecuación.

d) $4x - 8 = 4$
$4 \times 5 - 8 = 4$
$20 - 8 = 4$
$12 \neq 4$

Por tanto, 5 no es solución de la ecuación.

Fecha: **U5 2.1**

Ⓟ Se cobrarán \$470. Se reciben \$300 en billetes de 100 y el resto en billetes de \$5. ¿Cuántos billetes de \$5 se recibirán?
$x \longrightarrow$ cantidad de billetes de \$5

¿Cuál es el valor de x en $5x + 300 = 470$?

Ⓢ

Valor de x	Miembro izquierdo $5x + 300$	Resultado del miembro izquierdo
si $x = 31$	$5 \times 31 + 300$	455
si $x = 32$	$5 \times 32 + 300$	460
si $x = 33$	$5 \times 33 + 300$	465
si $x = 34$	$5 \times 34 + 300$	470
si $x = 35$	$5 \times 35 + 300$	475
si $x = 36$	$5 \times 36 + 300$	480

Por tanto: x es 34.

Ⓡ

a), c) y d) 5 no es solución de la ecuación.

b) 5 es solución de la ecuación.

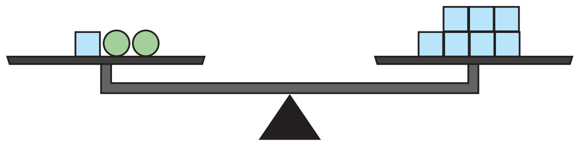
Tarea: página 92 del Cuaderno de Ejercicios.

2.2 Propiedades de la igualdad

P

Dada la ecuación $2x + 1 = 7$, determina el valor de x, imaginando la ecuación como el equilibrio de una balanza. Una x se representa con una bolita y una unidad con un cubo.

$2x + 1 = 7$

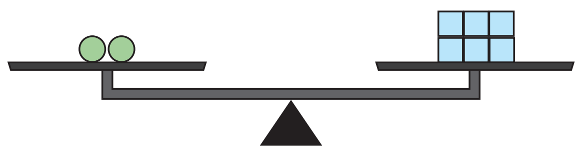


Puedes quitar objetos en cada lado de la balanza procurando mantener el equilibrio.

S

… Quitando un cubo en ambos lados de la balanza.

$2x = 6$



… Quitando una bolita a un lado y los tres cubos que le corresponden en el otro.

$x = 3$

C

Una igualdad matemática se mantiene cuando:

1. En ambos miembros se suma el mismo número o expresión. Si A = B, entonces A + C = B + C.
2. En ambos miembros se resta el mismo número o expresión. Si A = B, entonces A − C = B − C.
3. En ambos miembros se multiplica el mismo número o expresión. Si A = B, entonces A × C = B × C.
4. En ambos miembros se divide por el mismo número (diferente de cero) o expresión. Si A = B, y C diferente de cero, entonces A ÷ C = B ÷ C.
5. Se intercambia el miembro izquierdo y derecho. Si A = B entonces B = A.

A las afirmaciones anteriores se les llama **propiedades de una igualdad**.

E

Escribe la propiedad utilizada en la solución de la siguiente ecuación en el paso de color rojo:

$3x + 2 = 41$

$3x + 2 - 2 = 41 - 2$ … Propiedad 2

$3x = 39$

$3x \div 3 = 39 \div 3$ … Propiedad 4

$x = 13$

Escribe la propiedad utilizada en la solución de las siguientes ecuaciones en el paso de color rojo:

a) $5x + 4 = 49$

$5x + 4 - 4 = 49 - 4$ … Propiedad 2

$5x = 45$

$5x \div 5 = 45 \div 5$ … Propiedad 4

$x = 9$

b) $\frac{1}{2}x - 1 = 5$

$\frac{1}{2}x - 1 + 1 = 5 + 1$ … Propiedad 1

$\frac{1}{2}x = 6$

$\frac{1}{2}x \times 2 = 6 \times 2$ … Propiedad 3

$x = 12$

Unidad 5

Indicador de logro

2.2 Identifica las propiedades de una igualdad matemática.

Secuencia

En la clase anterior se estudió el concepto de resolución de una ecuación, y para esta clase se presentan las propiedades de una igualdad matemática como herramientas para la resolución.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Identificar las propiedades de una igualdad a través de la intuición. En el caso particular de la situación, deberá identificar la cantidad de objetos que tiene que ir retirando cada vez en la balanza para que se mantenga en equilibrio. En el segundo paso de la Ⓢ se debe enfatizar que el número de objetos en cada lado de la balanza se ha dividido en dos partes iguales y luego se ha retirado una de las partes.

Ⓒ Establecer las propiedades de una igualdad. En este punto se debe explicar que esas propiedades son las herramientas a utilizar para resolver una ecuación.

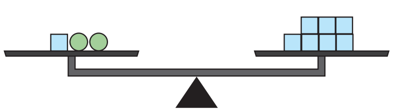
Fecha:

U5 2.2

Ⓟ Para $2x + 1 = 7$, ¿cuál es el valor de x?

$x \longrightarrow$ una bolita

una unidad $\longrightarrow$ un cubo.

$2x + 1 = 7$ 

Ⓢ $\downarrow$ ... Quitando un cubo en ambos lados de la balanza.

$2x = 6$

$\downarrow$ ... Dividiendo en dos partes iguales cada uno de los lados y quitando una parte de estas en cada lado.

$x = 3$

Ⓔ
$3x + 2 = 41$

$3x + 2 - 2 = 41 - 2$ ... $\boxed{\text{Propiedad 2}}$

$3x = 39$

$3x \div 3 = 39 \div 3$ ... $\boxed{\text{Propiedad 4}}$

$x = 13$

Ⓡ a) Propiedad 2
Propiedad 4

b) Propiedad 1
Propiedad 3

Tarea: página 93 del Cuaderno de Ejercicios.

2.3 Solución de ecuaciones aplicando la propiedad 1 de las igualdades

P

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x - 3 = 2$ b) $-6 + x = 1$ c) $x - 7 = -4$ d) $x - 4 = -8$

S

a) $x - 3 = 2$
$x - 3 + 3 = 2 + 3$
$x = 5$

Se suma 3 en ambos miembros.

b) $-6 + x = 1$
$-6 + x + 6 = 1 + 6$
$x = 7$

Se suma 6 en ambos miembros.

c) $x - 7 = -4$
$x - 7 + 7 = -4 + 7$
$x = 3$

Se suma 7 en ambos miembros.

d) $x - 4 = -8$
$x - 4 + 4 = -8 + 4$
$x = -4$

Se suma 4 en ambos miembros.

C

Para resolver ecuaciones como las anteriores se aplica la **Propiedad 1** de una igualdad, se suma en ambos miembros un mismo número, de manera que solo quede la incógnita en un miembro de la ecuación.

Por ejemplo:

$$x - 3 = 2$$
$$x - 3 + 3 = 2 + 3$$

En la clase 2.2 se aprendió a transformar la ecuación de tal forma que x se encuentre en un miembro y un número en el otro miembro, por ejemplo: $x = 5$, $x = 7$, $x = 3$ y $x = -4$ a este proceso se le llama resolver la ecuación, y también recibe el nombre de "despejar x".

1. Completa el espacio en las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $x - 4 = 3$
$x - 4 + \boxed{4} = 3 + \boxed{4}$
$x = 7$

b) $-2 + x = 4$
$-2 + x \boxed{+} 2 = 4 \boxed{+} 2$
$x = 6$

c) $x - 7 = -2$
$x - 7 + 7 = -2 + 7$
$x = \boxed{5}$

d) $x - 3 = -8$
$x - 3 + \boxed{3} = -8 + \boxed{3}$
$x = -5$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x - 4 = 5$
$x = 9$

b) $-7 + x = 3$
$x = 10$

c) $x - 9 = -5$
$x = 4$

d) $x - 6 = -10$
$x = -4$

Indicador de logro

2.3 Resuelve una ecuación de primer grado sumando la misma cantidad en ambos miembros.

Secuencia

En la clase anterior se presentaron las propiedades de una igualdad, y específicamente se trabajó la identificación de ellas en la solución de una ecuación. Por lo que a partir de esta clase se comenzará a trabajar en sus aplicaciones, de modo que se utilizará la propiedad 1 para resolver ecuaciones.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Aplicar la propiedad 1 de una igualdad para resolver las ecuaciones. Los estudiantes en este momento ya conocen las propiedades de una igualdad y han practicado la identificación de las propiedades en la solución de una ecuación en la clase anterior; por tanto, se espera que tengan la oportunidad de resolver las ecuaciones planteadas.

Ⓒ Establecer que para resolver ecuaciones como las presentadas en Ⓟ se aplica la propiedad 1; en este punto es importante señalar que al proceso que se sigue para que x se encuentre en un miembro y un número en el otro miembro se le llama **resolver la ecuación**, o **despejar la incógnita**.

Solución de algunos ítems:

2. a)
$$x - 4 = 5$$
$$x - 4 + 4 = 5 + 4$$
$$x = 9$$

d)
$$x - 6 = -10$$
$$x - 6 + 6 = -10 + 6$$
$$x = -4$$

Fecha: **U5 2.3**

Ⓟ Resuelve:

a) $x - 3 = 2$ b) $-6 + x = 1$ c) $x - 7 = -4$ d) $x - 4 = -8$

Ⓢ a)
$$x - 3 = 2$$
$$x - 3 + 3 = 2 + 3$$
$$x = 5$$
Se suma 3 en ambos miembros.

b)
$$-6 + x = 1$$
$$-6 + x + 6 = 1 + 6$$
$$x = 7$$
Se suma 6 en ambos miembros.

c)
$$x - 7 = -4$$
$$x - 7 + 7 = -4 + 7$$
$$x = 3$$
Se suma 7 en ambos miembros.

d)
$$x - 4 = -8$$
$$x - 4 + 4 = -8 + 4$$
$$x = -4$$
Se suma 4 en ambos miembros.

Ⓡ 1. a) 4 y 4 b) + y +
c) 5 d) 3 y 3

2. a) $x = 9$ b) $x = 10$
c) $x = 4$ d) $x = -4$

Tarea: página 94 del Cuaderno de Ejercicios.

2.4 Solución de ecuaciones aplicando la propiedad 2 de las igualdades

P

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x + 2 = 3$ b) $4 + x = 9$ c) $x + 7 = 4$ d) $x + 4 = -8$

Despejar la incógnita consiste en llegar a una expresión de la forma $x = \boxed{}$, es decir que x tenga coeficiente 1.

¿Qué número se debe restar para despejar x ?

S

a) $x + 2 = 3$
$x + 2 - 2 = 3 - 2$
$x = 1$

Se resta 2 en ambos miembros.

b) $4 + x = 9$
$4 + x - 4 = 9 - 4$
$x = 5$

Se resta 4 en ambos miembros.

c) $x + 7 = 4$
$x + 7 - 7 = 4 - 7$
$x = -3$

Se resta 7 en ambos miembros.

d) $x + 4 = -8$
$x + 4 - 4 = -8 - 4$
$x = -12$

Se resta 4 en ambos miembros.

C

Para resolver ecuaciones como las anteriores se aplica la **Propiedad 2** de una igualdad, es decir se resta en ambos miembros un mismo número, de manera que solo quede la incógnita en un miembro de la ecuación.

Por ejemplo:

$$x + 2 = 3$$
$$x + 2 - 2 = 3 - 2$$

1. Completa el espacio en las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $x + 4 = 5$
$x + 4 - \boxed{4} = 5 - \boxed{4}$
$x = 1$

b) $2 + x = 4$
$2 + x \boxed{-} 2 = 4 \boxed{-} 2$
$x = 2$

c) $x + 7 = 2$
$x + 7 - 7 = 2 - 7$
$x = \boxed{-5}$

d) $x + 3 = -8$
$x + 3 - \boxed{3} = -8 - \boxed{3}$
$x = \boxed{-11}$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x + 8 = 13$
$x = 5$

b) $7 + x = 10$
$x = 3$

c) $x + 9 = 5$
$x = -4$

d) $x + 6 = -10$
$x = -16$

Unidad 5

Indicador de logro

2.4 Resuelve una ecuación de primer grado restando la misma cantidad en ambos miembros.

Secuencia

Anteriormente se aplicó la propiedad 1 de una igualdad para resolver una ecuación de primer grado, por lo que en esta clase se resolverán ecuaciones aplicando la propiedad 2.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Aplicar la propiedad 2 de una igualdad para resolver las ecuaciones. En este momento los estudiantes ya conocen las propiedades de una igualdad y han aplicado la propiedad 1 para resolver ecuaciones en la clase anterior; por tanto, se espera que tengan la oportunidad de resolver las ecuaciones planteadas. En caso de que los estudiantes presenten dificultades para resolver las ecuaciones, puede orientarlos para que se apoyen de la información que se presenta en el recuadro de presaber y el de pista.

Ⓒ Establecer que para resolver ecuaciones como las presentadas en Ⓟ se aplica la propiedad 2.

Solución de algunos ítems:

2. a) $x + 8 = 13$
$x + 8 - 8 = 13 - 8$
$x = 5$

d) $x + 6 = -10$
$x + 6 - 6 = -10 - 6$
$x = -16$

Fecha: **U5 2.4**

Ⓟ Resuelve:
a) $x + 2 = 3$ b) $4 + x = 9$ c) $x + 7 = 4$ d) $x + 4 = -8$

Ⓢ a) $x + 2 = 3$
$x + 2 - 2 = 3 - 2$
$x = 1$
Se resta 2 en ambos miembros.

b) $4 + x = 9$
$4 + x - 4 = 9 - 4$
$x = 5$
Se resta 4 en ambos miembros.

c) $x + 7 = 4$
$x + 7 - 7 = 4 - 7$
$x = -3$
Se resta 7 en ambos miembros.

d) $x + 4 = -8$
$x + 4 - 4 = -8 - 4$
$x = -12$
Se resta 4 en ambos miembros.

Ⓡ 1. a) 4 y 4 b) – y –
c) –5 d) –11

2. a) $x = 5$ b) $x = 3$
c) $x = -4$ d) $x = -16$

Tarea: página 95 del Cuaderno de Ejercicios.

2.5 Método de transposición de términos

P

Resuelve la ecuación: $x - 3 = 4$.

S

Paso 1
A x se le resta 3 y esto es igual a 4.

$$x \boxed{- 3} = 4$$

Paso 2
Se suma 3 en ambos miembros para preservar la igualdad matemática.

$$x - 3 + 3 = 4 + 3$$

Paso 3
−3 y 3 se eliminan en el miembro izquierdo y solo queda la incógnita; en el miembro derecho solo quedan cantidades conocidas.

$$x = 4 \boxed{+ 3}$$
$$x = 7$$

Observa que en el paso 3, el 3 está sumando en el miembro derecho.

C

Para la ecuación anterior el número 3 restaba en el miembro izquierdo y pasó al miembro derecho a sumar:

$$x \boxed{- 3} = 4$$
$$x = 4 \boxed{+ 3}$$

Se puede resolver una ecuación realizando directamente del paso 1 al 3. Cuando un término pasa de un miembro al otro con el signo cambiado se le llama **transposición de término.**

E

Resuelve por transposición la ecuación:

Al resolver la ecuación se tiene: $x + 5 = 12$

$$x \boxed{+ 5} = 12$$
$$x = 12 \boxed{- 5}$$
$$x = 7$$

El 5 estaba sumando en el miembro izquierdo y pasa al miembro derecho restando.

Resuelve por transposición las siguientes ecuaciones:

a) $x - 5 = 2$
$x = 2 + \boxed{5}$
$x = \boxed{7}$

b) $x - 1 = 3$
$x = 4$

c) $-1 + x = 3$
$x = 4$

d) $-2 + x = 4$
$x = 6$

e) $x + 3 = 5$
$x = 5 - \boxed{3}$
$x = \boxed{2}$

f) $x + 6 = 8$
$x = 2$

g) $4 + x = 5$
$x = 1$

h) $2 + x = 4$
$x = 2$

Indicador de logro

2.5 Resuelve una ecuación de primer grado realizando la transposición de términos.

Secuencia

En las clases 2.3 y 2.4 se han aplicado las propiedades 1 y 2 respectivamente para resolver una ecuación de primer grado; por lo que en esta clase se presenta el **método de transposición de términos** como una forma práctica de la aplicación de las propiedades 1 y 2 en la resolución de ecuaciones de primer grado.

Propósito

P, S Resolver la ecuación utilizando la propiedad 1 de una igualdad; cuando se ha determinado la solución debe señalarse el hecho de que en el paso 3 del proceso se observa cómo el 3 que estaba restando en el miembro izquierdo pasó a sumar al miembro derecho. Si este paso no está explícito en el proceso de solución entonces debe escribirse en la solución planteada en la pizarra para que todos los estudiantes puedan observar.

C Establecer que hay un método práctico para resolver la ecuación, el cuál tiene como nombre **transposición de términos**. Señalar que la transposición de términos es una forma práctica de aplicar la propiedad 1 y 2 de una igualdad.

Solución de algunos ítems:

b) $x - 1 = 3$
$x = 3 + 1$
$x = 4$

f) $x + 6 = 8$
$x = 8 - 6$
$x = 2$

Fecha: **U5 2.5**

P Resuelve: $x - 3 = 4$

S
$x \boxed{-\ 3} = 4$ **Paso 1**

$x - 3 + 3 = 4 + 3$ **Paso 2**

$x = 4 \boxed{+\ 3}$

$x = 7$ **Paso 3**

Observa que en el paso 3, el 3 está sumando en el miembro derecho.

E
$x \boxed{+\ 5} = 12$

$x = 12 \boxed{-\ 5}$

$x = 7$

El 5 estaba sumando en el miembro izquierdo y pasa al miembro derecho restando.

R
a) 5 y 7 b) $x = 4$
c) $x = 4$ d) $x = 6$
e) 3 y 2 f) $x = 2$
g) $x = 1$ h) $x = 2$

Tarea: página 96 del Cuaderno de Ejercicios.

2.6 Solución de ecuaciones aplicando la propiedad 3 de las igualdades

Resuelve las siguientes ecuaciones :

a) $\frac{1}{5}x = 10$ b) $\frac{2}{3}x = 6$ c) $-\frac{x}{2} = 6$

¿Qué operación se debe aplicar en ambos miembros para despejar x? (Despejar x implica que tenga coeficiente 1).

a) $\frac{1}{5}x = 10$

$\frac{1}{5}x \times 5 = 10 \times 5$

$x = 50$

Se multiplica por 5 en ambos miembros.

b) $\frac{2}{3}x = 6$

$\frac{2}{3}x \times \frac{3}{2} = 6 \times \frac{3}{2}$

$x = \frac{18}{2}$

$x = 9$

Se multiplica por $\frac{3}{2}$ en ambos miembros.

c) $-\frac{x}{2} = 6$

$-\frac{1}{2}x = 6$

$-\frac{1}{2}x \times (-2) = 6 \times (-2)$

$x = -12$

Se multiplica por -2 en ambos miembros.

Para resolver ecuaciones aplicando la **Propiedad 3** de las igualdades, se multiplica ambos miembros por el recíproco del coeficiente de la incógnita. En el caso de que el coeficiente que acompaña a la incógnita sea una fracción, primero se representa como la multiplicación de un número fraccionario por la incógnita y luego, se realiza la multiplicación del recíproco del número fraccionario en ambos miembros.

Una regla práctica para despejar la incógnita en los casos presentados anteriormente es escribir a la incógnita con coeficiente 1 y multiplicar el otro miembro por el recíproco del coeficiente que tenía la incógnita originalmente.

Por ejemplo:

$$\frac{1}{5}x = 10$$
$$x = 10 \times 5$$
$$x = 50$$

1. Completa el recuadro en las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{1}{9}x = 2$

$\frac{1}{9}x \times \boxed{9} = 2 \times \boxed{9}$

$x = 18$

b) $\frac{x}{3} = -7$

$\frac{1}{3}x = -7$

$\frac{1}{3}x \times \boxed{3} = -7 \times \boxed{3}$

$x = -21$

c) $-\frac{1}{6}x = 3$

$-\frac{x}{6} \times \boxed{(-6)} = 3 \times \boxed{(-6)}$

$x = \boxed{-18}$

d) $-\frac{2x}{3} = -8$

$-\frac{2}{3}x = -8$

$-\frac{2}{3}x \times \boxed{} = -8 \times \boxed{\left(-\frac{3}{2}\right)}$

$\left(-\frac{3}{2}\right)$

$x = 12$

e) $\frac{1}{4}x = 2$

$x = 2 \times \boxed{4}$

$x = 8$

f) $\frac{x}{3} = -5$

$x = -5 \times \boxed{3}$

$x = -15$

g) $-\frac{1}{5}x = 4$

$x = 4 \times \boxed{-5}$

$x = -20$

h) $-\frac{3x}{5} = -6$

$x = -6 \times \boxed{\left(-\frac{5}{3}\right)}$

$x = 10$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{1}{4}x = 3$
$x = 12$

b) $\frac{x}{4} = 9$
$x = 36$

c) $-\frac{2}{7}x = 4$
$x = -14$

d) $-\frac{5x}{4} = -10$
$x = 8$

Unidad 5

Indicador de logro

2.6 Resuelve una ecuación de primer grado multiplicando la misma cantidad en ambos miembros.

Secuencia

En clases anteriores se han aplicado las propiedades 1 y 2 para la resolución de ecuaciones de primer grado y opcionalmente el método de transposición. Por lo que en esta clase se aplicará la propiedad 3 de una igualdad para resolver una ecuación de primer grado. Al igual que se hizo con las propiedades 1 y 2 al ofrecer un método práctico de aplicación con la transposición de términos, también se presenta una forma práctica de aplicación de la propiedad 3 en la resolución de una ecuación de primer grado.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Aplicar la propiedad 3 de una igualdad para resolver las ecuaciones. En este momento los estudiantes ya conocen el recíproco de un número y las propiedades de una igualdad. Por tanto se espera que tengan la oportunidad de resolver las ecuaciones planteadas. En c), si los estudiantes no tienen dificultades, en lugar de reescribir el miembro izquierdo en forma de un producto, se multiplican por –2 ambos miembros, para que el denominador de la fracción sea 1 y se elimine el signo negativo.

Ⓒ Señalar que en el proceso donde la incógnita se encuentre en el numerador de una fracción, se debe reescribir la ecuación de forma que la fracción quede expresada como la multiplicación de una fracción por la incógnita, como en el caso de c). También hay que explicar que se puede aplicar la propiedad 3 de una forma práctica, en la que se hace que el coeficiente de la incógnita sea 1 y se multiplica el número del otro miembro por el recíproco del coeficiente original de la incógnita. A este proceso no se le debe llamar transposición de término ya que el coeficiente no es un término.

Solución de algunos ítems:

2. a) $\frac{1}{4}x = 3$
$x = 3 \times 4$
$x = 12$

d) $-\frac{5x}{4} = -10$
$x = -10 \times \left(-\frac{4}{5}\right)$
$x = 8$

Fecha:

U5 2.6

Ⓟ Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{1}{5}x = 10$ b) $\frac{2}{3}x = 6$ c) $-\frac{x}{2} = 6$

Despejar x implica que tenga coeficiente 1.

Ⓢ a) $\frac{1}{5}x = 10$
$\frac{1}{5}x \times 5 = 10 \times 5$
$x = 50$

Se multiplica por 5 en ambos miembros.

b) $\frac{2}{3}x = 6$
$\frac{2}{3}x \times \frac{3}{2} = 6 \times \frac{3}{2}$
$x = \frac{18}{2}$
$x = 9$

Se multiplica por $\frac{3}{2}$ en ambos miembros.

c) $-\frac{x}{2} = 6$
$-\frac{1}{2}x = 6$
$-\frac{1}{2}x \times (-2) = 6 \times (-2)$
$x = -12$

Se multiplica por –2 en ambos miembros.

Ⓡ 1.
a) 9 y 9
b) 3 y 3
c) (–6), (–6) y –18
d) $\left(-\frac{3}{2}\right)$ y $\left(-\frac{3}{2}\right)$
e) 4
f) 3
g) (–5)
h) $\left(-\frac{5}{3}\right)$

Tarea: página 97 del Cuaderno de Ejercicios.

2.7 Solución de ecuaciones aplicando la propiedad 4 de las igualdades

P

Resuelve la siguiente ecuación: $7x = -21$.

Un número multiplicado por su "recíproco" es 1.

S

Para resolver la ecuación se divide ambos miembros por el coeficiente de la incógnita. De manera alternativa se puede aplicar la propiedad 3 utilizando el proceso visto en la clase anterior.

Aplicando la propiedad 4

$$7x = -21$$
$$7x \div 7 = -21 \div 7$$
$$x = -3$$

Aplicando la propiedad 3

$$7x = -21$$
$$7x \times \frac{1}{7} = -21 \times \frac{1}{7}$$
$$x = -\frac{21}{7}$$
$$x = -3$$

C

Para resolver ecuaciones aplicando la **Propiedad 4** de las igualdades, se divide ambos miembros por el coeficiente de la incógnita. En forma opcional se pueden resolver ecuaciones como la clase anterior, aplicando la **Propiedad 3** multiplicando ambos miembros de la ecuación por el recíproco del coeficiente de la incógnita.

Una regla práctica para despejar la incógnita en ecuaciones como la anterior, es escribir la incógnita con coeficiente 1 y dividir directamente el otro miembro por el coeficiente de la incógnita.

Por ejemplo:

$$7x = -21$$
$$x = -21 \div 7$$
$$x = -3$$

1. Completa el espacio en las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $3x = 27$
$3x \div \boxed{3} = 27 \div \boxed{3}$
$x = 9$

b) $2x = 6$
$2x \div 2 = 6 \div \boxed{2}$
$x = 3$

c) $4x = 16$
$4x \div 4 = 16 \div 4$
$x = \boxed{4}$

d) $6x = -18$
$6x \div 6 = -18 \div \boxed{6}$
$x = \boxed{-3}$

e) $-5x = 25$
$x = 25 \div (-5)$
$x = \boxed{-5}$

f) $-3x = 27$
$x = 27 \div \boxed{(-3)}$
$x = \boxed{-9}$

g) $-x = 5$
$x = 5 \div \boxed{(-1)}$
$x = \boxed{-5}$

h) $-2x = -4$
$x = -4 \div \boxed{(-2)}$
$x = \boxed{2}$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $7x = 14$
$x = 2$

b) $5x = -20$
$x = -4$

c) $-6x = 24$
$x = -4$

d) $-x = 9$
$x = -9$

Indicador de logro

2.7 Resuelve una ecuación de primer grado dividiendo por la misma cantidad en ambos miembros.

Secuencia

Para esta clase se aplicará la propiedad 4 de una igualdad para resolver una ecuación de primer grado. Al igual que se hizo con las propiedades 1, 2 y 3 al ofrecer un método práctico de su aplicación en la resolución de una ecuación de primer grado, también se presenta una forma práctica de aplicación de la propiedad 4.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Aplicar la propiedad 4 de una igualdad para resolver las ecuaciones. En este momento los estudiantes ya conocen el recíproco de un número y las propiedades de una igualdad. Por tanto se espera que tengan la oportunidad de resolver las ecuaciones planteadas; en caso de que los estudiantes presenten dificultades para resolverlas, puede orientarlos para que se apoyen de la información que se presenta en el recuadro de presaber. Se pueden aceptar dos soluciones, aplicando la propiedad 4 o 3.

Ⓒ Establecer que en ecuaciones como las presentadas en Ⓟ se aplica la propiedad 4 o 3 para resolverlas; también hay que explicar que se puede aplicar la propiedad 4 de una forma práctica en la que se hace que el coeficiente de la incógnita sea 1 y se divide el número del otro miembro por el coeficiente original de la incógnita. A este proceso no se le debe llamar transposición de término ya que el coeficiente no es un término.

Solución de algunos ítems:

2. a) $7x = 14$
$x = 14 \div 7$
$x = 2$

d) $-x = 9$
$x = 9 \div (-1)$
$x = -9$

Fecha:

U5 2.7

Ⓟ Resuelve: $7x = -21$

Un número multiplicado por su "recíproco" es 1.

Ⓢ Se puede resolver de dos formas.

Con propiedad 4

$$7x = -21$$
$$7x \div 7 = (-21) \div 7$$
$$x = -3$$

Con propiedad 3

$$7x = -21$$
$$7x \times \tfrac{1}{7} = -21 \times \tfrac{1}{7}$$
$$x = -\tfrac{21}{7}$$
$$x = -3$$

Ⓡ 1. a) 3 y 3 b) 2 c) 4
d) 6 y –3 e) –5 f) (–3) y –9
g) (–1) y –5 h) (–2) y 2

2. a) 2 b) –4 c) –4 d) –9

Tarea: página 98 del Cuaderno de Ejercicios.

2.8 Solución de ecuaciones aplicando más de una propiedad

P

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5x + 7 = -8$

b) $-2x - 6 = 10$

c) $\frac{x}{5} - 7 = 3$

Para poder aplicar la **propiedad 3** o **4** solo tiene que haber un término en el miembro izquierdo.

S

a) $5x + 7 = -8$
$5x = -8 - 7$
$5x = -15$
$x = -15 \div 5$
$x = -3$

b) $-2x - 6 = 10$
$-2x = 10 + 6$
$-2x = 16$
$x = 16 \div (-2)$
$x = -8$

c) $\frac{x}{5} - 7 = 3$
$\frac{x}{5} = 3 + 7$
$\frac{x}{5} = 10$
$x = 10 \times 5$
$x = 50$

C

Para resolver ecuaciones como las anteriores se tiene que

1. Transponer las cantidades conocidas al miembro derecho.
2. Realizar las operaciones indicadas.
3. Aplicar la propiedad 3 o 4 para despejar x.

1. Completa el recuadro en las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $4x + 3 = 15$
$4x = 15 - \boxed{3}$
$4x = 12$
$x = 12 \div \boxed{4}$
$x = 3$

b) $-2x - 6 = 10$
$-2x = 10 + \boxed{6}$
$-2x = 16$
$x = 16 \div \boxed{(-2)}$
$x = \boxed{-8}$

c) $\frac{x}{10} - 8 = 4$
$\frac{1}{10}x = 4 + \boxed{8}$
$\frac{1}{10}x = \boxed{12}$
$x = 12 \times \boxed{10}$
$x = \boxed{120}$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x + 1 = 5$
$x = 2$

b) $-x - 8 = 6$
$x = -14$

c) $\frac{2x}{15} - 4 = -8$
$x = -30$

d) $\frac{x}{2} - 3 = 4$
$x = 14$

Unidad 5

97

Indicador de logro

2.8 Resuelve una ecuación de primer grado aplicando más de una propiedad de una igualdad.

Secuencia

Desde la clase 2.3 solo se han resuelto ecuaciones de primer grado que requieren de la aplicación de una sola propiedad. Por lo que ahora se trabajará con ecuaciones en las que se deben aplicar 2 propiedades para resolverlas.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Aplicar más de una propiedad de una igualdad para resolver las ecuaciones. En caso de que los estudiantes presenten dificultades para resolver las ecuaciones, puede orientarlos para que se apoyen de la información que se presenta en el recuadro de pista. Hay que hacer énfasis en que no se puede aplicar directamente la propiedad 3 o 4 hasta que se tenga el término con la incógnita solo en uno de los miembros.

Ⓒ Establecer los pasos para resolver ecuaciones como las presentadas en el Ⓟ.

Solución de algunos ítems:

2. a) $2x + 1 = 5$
$2x = 5 - 1$
$2x = 4$
$x = 4 \div 2$
$x = 2$

d) $\frac{x}{2} - 3 = 4$
$\frac{1}{2}x = 4 + 3$
$\frac{1}{2}x = 7$
$x = 7 \times 2$
$x = 14$

Fecha:

U5 2.8

Ⓟ Resuelve:
a) $5x + 7 = -8$ b) $-2x - 6 = 10$ c) $\frac{x}{5} - 7 = 3$

Para poder aplicar la **propiedad 3** o **4** solo tiene que haber un término en el miembro izquierdo.

Ⓢ

a) $5x + 7 = -8$
$5x = -8 - 7$
$5x = -15$
$x = -15 \div 5$
$x = -3$

b) $-2x - 6 = 10$
$-2x = 10 + 6$
$-2x = 16$
$x = 16 \div (-2)$
$x = -8$

c) $\frac{x}{5} - 7 = 3$
$\frac{x}{5} = 3 + 7$
$\frac{x}{5} = 10$
$x = 10 \times 5$
$x = 50$

Ⓡ 1.
a) 3 y 4
b) 6, (–2) y –8
c) 8, 12, 10 y 120

2.
a) $x = 2$
b) $x = -14$
c) $x = -30$
d) $x = 14$

Tarea: página 99 del Cuaderno de Ejercicios.

2.9 Solución de ecuaciones con incógnitas en ambos miembros

P

Resuelve la ecuación: $3x = 4 + 2x$

La transposición de términos es igualmente válida para términos que incluyen la incógnita.

S

$$3x = 4 + 2x$$
$$3x - 2x = 4 \qquad \text{transponiendo } 2x \text{ al miembro izquierdo.}$$
$$x = 4$$

C

Para resolver una ecuación con la incógnita en ambos miembros se tiene que

1. Transponer todos los términos que tienen x al miembro izquierdo.
2. Transponer todas las cantidades conocidas al miembro derecho.
3. Realizar las operaciones indicadas.
4. Aplicar la propiedad 3 o 4 para despejar x.

E

Llena los espacios en blanco, en la solución de las siguientes ecuaciones:

a) $5x = 24 + x$

$5x\,\boxed{}\,x = 24$

$4x = 24$

$x = \boxed{}$

b) $6x + 3 = 3x + 24$

$6x - \boxed{} = 24 - 3$

$3x = \boxed{}$

$x = \boxed{}$

Solución.

a) $5x = 24 + x$

$5x\,\boxed{-}\,x = 24$

$4x = 24$

$x = \boxed{6}$

b) $6x + 3 = 3x + 24$

$6x - \boxed{3x} = 24 - 3$

$3x = \boxed{21}$

$x = \boxed{7}$

1. Completa los recuadros en blanco, en la solución de las siguientes ecuaciones:

a) $3x = 7x + 12$

$3x - \boxed{7x} = 12$

$\boxed{-4x} = 12$

$x = \boxed{-3}$

b) $9x + 3 = 2x - 11$

$9x\,\boxed{-}\,2x = -11 - 3$

$\boxed{7x} = \boxed{-14}$

$x = \boxed{-2}$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x = -3 + x$
$x = -3$

b) $x = -2x - 9$
$x = -3$

c) $-x - 2 = -20 + 5x$
$x = 3$

d) $8x + 2 = 3x + 7$
$x = 1$

Indicador de logro

2.9 Resuelve una ecuación de primer grado con incógnitas en ambos miembros.

Secuencia

En esta clase se presentan ecuaciones que tengan incógnitas en ambos miembros. Al principio este tipo de ecuaciones pueden presentar dificultades al estudiante por el hecho de que la aplicación de las propiedades se hace utilizando una cantidad desconocida (la incógnita), razón por la cual se aborda este tipo de ecuaciones una vez que los estudiantes han alcanzado cierto grado de dominio de las propiedades de una igualdad.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Aplicar las propiedades de una igualdad para resolver la ecuación. La solución de este tipo de ecuaciones puede representar problemas ya que es la primera vez que los estudiantes aplicarán las propiedades de una igualdad utilizando una cantidad desconocida representada por una variable; por tanto, se debe enfatizar que las propiedades siguen siendo igualmente válidas en estos casos.

Ⓒ Establecer los pasos para resolver ecuaciones que tienen incógnitas en ambos miembros.

Solución de algunos ítems:

2. a) $2x = -3 + x$
$2x - x = -3$
$x = -3$

d) $8x + 2 = 3x + 7$
$8x - 3x = 7 - 2$
$5x = 5$
$x = 5 \div 5$
$x = 1$

Fecha:

U5 2.9

Ⓟ Resuelve la ecuación:
$3x = 4 + 2x$

Ⓢ $3x = 4 + 2x$ ... Transponiendo $2x$ al miembro izquierdo.
$3x - 2x = 4$
$x = 4$

Ⓔ a) $5x = 24 + x$
$5x \boxed{-} x = 24$
$4x = 24$
$x = \boxed{6}$

b) $6x + 3 = 3x + 24$
$6x - \boxed{3x} = 24 - 3$
$3x = \boxed{21}$
$x = \boxed{7}$

Ⓡ 1. a) $7x$, $-4x$ y -3

b) $-$, $7x$, -14 y -2

2. a) $x = -3$

b) $x = -3$

c) $x = 3$

d) $x = 1$

Tarea: página 100 del Cuaderno de Ejercicios.

2.10 Practica lo aprendido

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x - 4 = 3$
$x = 7$

b) $x - 2 = -5$
$x = -3$

c) $x + 5 = 8$
$x = 3$

d) $x + 6 = -2$
$x = -8$

e) $4x = 16$
$x = 4$

f) $-2x = 8$
$x = -4$

g) $\frac{1}{3}x = 5$
$x = 15$

h) $-\frac{1}{2}x = 6$
$x = -12$

i) $\frac{1}{4}x = 6$
$x = 24$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x + 8 = -4$
$x = -4$

b) $2 - 3x = 14$
$x = -4$

c) $5x + 7 = 32$
$x = 5$

d) $-4x - 2 = -18$
$x = 4$

e) $-2x - 7 = 1$
$x = -4$

f) $5x - 3 = 12$
$x = 3$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 3 = -x - 9$
$x = -2$

b) $3 = 5x - 12$
$x = 3$

c) $-3x - 11 = x + 5$
$x = -4$

d) $8x - 30 = 2x - 6$
$x = 4$

e) $11x - 15 = 12 + 2x$
$x = 3$

f) $x + 13 = 43 - 14x$
$x = 2$

Indicador de logro

2.10 Resuelve problemas correspondientes a ecuaciones de primer grado.

Solución de algunos ítems:

1. a) $x - 4 = 3$
$x = 3 + 4$
$x = 7$

c) $x + 5 = 8$
$x = 8 - 5$
$x = 3$

e) $4x = 16$
$x = 16 \div 4$
$x = 4$

h) $-\frac{1}{2}x = 6$
$x = 6 \times (-2)$
$x = -12$

2. a) $3x + 8 = -4$
$3x = -4 - 8$
$3x = -12$
$x = -12 \div 3$
$x = -4$

f) $5x - 3 = 12$
$5x = 12 + 3$
$5x = 15$
$x = 15 \div 5$
$x = 3$

3. a) $2x - 3 = -x - 9$
$2x + x = -9 + 3$
$3x = -6$
$x = -6 \div 3$
$x = -2$

f) $x + 13 = 43 - 14x$
$x + 14x = 43 - 13$
$15x = 30$
$x = 30 \div 15$
$x = 2$

Tarea: página 101 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 2

2.11 Solución de ecuaciones con signos de agrupación

P

Resuelve la ecuación: $2(x + 3) + 4 = 20$

La propiedad distributiva establece que
$a(b + c) = a \times b + a \times c$
$(b + c) \times a = b \times a + c \times a$

S

$$\begin{aligned} 2(x + 3) + 4 &= 20 \\ 2x + 2 \times 3 + 4 &= 20 \\ 2x + 6 + 4 &= 20 \\ 2x + 10 &= 20 \\ 2x &= 20 - 10 \\ 2x &= 10 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

C

Para resolver una ecuación que incluye signos de agrupación como la anterior, se debe hacer lo siguiente:

1. Aplicar la propiedad distributiva para suprimir los paréntesis.
2. Transponer todos los términos que tienen x al miembro izquierdo y todas las cantidades conocidas al miembro derecho.
3. Realizar las operaciones indicadas.
4. Aplicar la propiedad 3 o 4 para despejar x.

E

Algunos ejemplos de solución de ecuaciones con signos de agrupación son:

a) $3 + (x - 5) = 6$
$$\begin{aligned} 3 + x - 5 &= 6 \\ x - 2 &= 6 \\ x &= 6 + 2 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

b) $4 - (x - 3) = 9$
$$\begin{aligned} 4 - x + 3 &= 9 \\ -x + 7 &= 9 \\ -x &= 9 - 7 \\ -x &= 2 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

1. Llena los espacios en la solución de las siguientes ecuaciones:

a) $3(x - 2) + 12 = 30$
$$\begin{aligned} 3x - \boxed{6} + 12 &= 30 \\ 3x + \boxed{6} &= 30 \\ 3x &= 30 - \boxed{6} \\ 3x &= \boxed{24} \\ x &= 8 \end{aligned}$$

b) $-2(x - 6) + 5 = 47$
$$\begin{aligned} -2x + \boxed{12} + 5 &= 47 \\ -2x + \boxed{17} &= 47 \\ -2x &= 47 - \boxed{17} \\ -2x &= \boxed{30} \\ x &= -15 \end{aligned}$$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3 + 4(x - 2) = 7$ $x = 3$

b) $5 - (x - 4) = 12$ $x = -3$

c) $2(x + 4) + 2 = 14$ $x = 2$

d) $-3(x - 1) - 2 = 10$ $x = -3$

Indicador de logro

2.11 Resuelve una ecuación de primer grado que incluye signos de agrupación.

Secuencia

Una vez que se resolvieron ecuaciones de primer grado a través de la utilización directa de las propiedades de una igualdad, se comenzará con el estudio de aquellas con características especiales. Para comenzar con este tipo de ecuaciones, en esta clase se trabajan aquellas que presentan signos de agrupación.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Resolver la ecuación, primero realizando el producto indicado para luego resolver la ecuación resultante tal como se ha hecho en las clases anteriores. En la clase 2.4 de la Unidad 4 los estudiantes aprendieron la forma de realizar el producto de una expresión algebraica con dos términos por un número. Puede darse que algunos estudiantes no realicen el producto, sino que pasen el 4 a restar al miembro izquierdo y luego dividan por 2 en ambos miembros y que después pasen el 3 a restar al miembro izquierdo. En caso de lo anterior, aceptar su solución ya que es totalmente válida, y en la pizarra pueden quedar escritas ambas soluciones. También es recomendable explicar a los estudiantes que se puede utilizar cualquier letra para representar a la incógnita y que no necesariamente debe ser x.

Ⓒ En el numeral 1 se puede referir también como propiedad distributiva a la multiplicación de una expresión algebraica con dos términos por un número. Si algún estudiante presenta la forma de solución de la ecuación en la que no se realiza el producto indicado, entonces en este punto también es importante decir que es posible resolver la ecuación de esa forma.

Solución de algunos ítems:

2. a)
$$\begin{aligned} 3 + 4(x - 2) &= 7 \\ 3 + 4x - 8 &= 7 \\ 4x - 5 &= 7 \\ 4x &= 7 + 5 \\ x &= 12 \div 4 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} -3(x - 1) - 2 &= 10 \\ -3x + 3 - 2 &= 10 \\ -3x + 1 &= 10 \\ -3x &= 10 - 1 \\ x &= 9 \div (-3) \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Fecha: **U5 2.11**

Ⓟ Resuelve:

$2(x + 3) + 4 = 20$

Propiedad distributiva:

$a(b + c) = a \times b + a \times c$

$(b + c) \times a = b \times a + c \times a$

Ⓢ
$$\begin{aligned} 2(x + 3) + 4 &= 20 \\ 2x + 2 \times 3 + 4 &= 20 \\ 2x + 6 + 4 &= 20 \\ 2x + 10 &= 20 \\ 2x &= 20 - 10 \\ 2x &= 10 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Ⓔ a)
$$\begin{aligned} 3 + (x - 5) &= 6 \\ 3 + x - 5 &= 6 \\ x - 2 &= 6 \\ x &= 6 + 2 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 4 - (x - 3) &= 9 \\ 4 - x + 3 &= 9 \\ -x + 7 &= 9 \\ -x &= 9 - 7 \\ -x &= 2 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Ⓡ 1. a) 6, 6, 6 y 24 b) 12, 17, 17 y 30

2. a) $x = 3$ b) $x = -3$

c) $x = 2$ d) $x = -3$

Tarea: página 102 del Cuaderno de Ejercicios.

2.12 Ecuaciones con solución fraccionaria o decimal

P

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $4x = 2$

b) $5x + 1 = -6$

El cociente de dos números puede ser expresado como una fracción.

S

a) $4x = 2$

$x = 2 \div 4$

$x = \frac{1}{2}$ o $x = 0.5$

b) $5x + 1 = -6$

$5x = -6 - 1$

$5x = -7$

$x = -7 \div 5$

$x = -\frac{7}{5}$ o $x = -1.4$

Cuando las respuestas son números fraccionarios también se pueden representar en forma de números decimales.

C

La solución de una ecuación de primer grado puede ser fraccionaria positiva o negativa, decimal positiva o negativa.

E

Resuelve la siguiente ecuación: $8x + 10 = 3 - 6x$.

Solución.

$$8x + 10 = 3 - 6x$$

$$14x = -7$$

$$x = -7 \div 14$$

$$x = -\frac{7}{14}$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ o } x = -0.5$$

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $6x = 2$
$x = \frac{1}{3}$

b) $2x + 2 = 5$
$x = \frac{3}{2}$

c) $-25x - 8 = 4 - x$
$x = -\frac{1}{2}$

d) $-2 + 7(x + 1) = 9$
$x = \frac{4}{7}$

e) $-9 = 3 + 5(x - 2)$
$x = -\frac{2}{5}$

f) $8(4x - 1) - 4 = 3(1 - x)$
$x = \frac{3}{7}$

Indicador de logro

2.12 Resuelve una ecuación de primer grado que tiene soluciones fraccionarias y decimales.

Secuencia

Siguiendo con las ecuaciones que presentan características especiales, en esta clase se trabajan ecuaciones cuya solución es fraccionaria. La ecuación puede ser de cualquiera de los tipos antes vistos pero lo importante es el hecho de que su solución es fraccionaria, positiva o negativa.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Resolver las ecuaciones cuyas soluciones son fraccionarias o decimales. Por lo general se expresa la solución en forma de fracción. Cuando esta fracción no representa un decimal finito, no es necesario representarlo en la forma decimal.

Solución de algunos ítems:

a) $6x = 2$

$x = 2 \div 6$

$x = \frac{2}{6}$

$x = \frac{1}{3}$

f) $8(4x - 1) - 4 = 3(1 - x)$

$32x - 8 - 4 = 3 - 3x$

$32x - 12 = 3 - 3x$

$32x + 3x = 3 + 12$

$35x = 15$

$x = \frac{15}{35}$

$x = \frac{3}{7}$

Fecha:

U5 2.12

Ⓟ Resuelve:

a) $4x = 2$ b) $5x + 1 = -6$

El cociente de dos números puede ser expresado como una fracción.

Ⓢ a) $4x = 2$

$x = 2 \div 4$

$x = \frac{1}{2}$ o $x = 0.5$

b) $5x + 1 = -6$

$5x = -6 - 1$

$5x = -7$

$5 = -7 \div 5$

$x = -\frac{1}{2}$ o $x = -1.4$

Ⓔ $8x + 10 = 3 - 6x$

$8x + 6x = 3 - 10$

$14x = -7$

$x = -7 \div 14$

$x = -\frac{7}{14}$

$x = -\frac{1}{2}$ o $x = -0.5$

Ⓡ a) $x = \frac{1}{3}$ b) $x = \frac{3}{2}$ c) $x = -\frac{1}{2}$

d) $x = \frac{4}{7}$ e) $x = -\frac{2}{5}$ f) $x = \frac{3}{7}$

Tarea: página 103 del Cuaderno de Ejercicios.

2.13 Ecuaciones con términos y coeficientes decimales

P

Resuelve la ecuación: $0.5x - 2.5 = 1.5$.

Si los números fueran enteros sería más fácil despejar x.

Cuando se multiplica un número decimal por 10, 100 o por 1 000, se mueve el punto decimal a la derecha en función del número de ceros.

Ejemplos:
- $0.5 \times 10 = 5$
- $1.45 \times 100 = 145$
- $0.642 \times 1\,000 = 642$

S

$$\begin{aligned} 0.5x - 2.5 &= 1.5 \\ 10(0.5x - 2.5) &= 10 \times 1.5 \\ 10 \times 0.5x - 10 \times 2.5 &= 15 \\ 5x &= 40 \\ x &= 40 \div 5 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Se puede resolver sin cambiar los decimales en enteros.

$$\begin{aligned} 0.5x - 2.5 &= 1.5 \\ 0.5x &= 1.5 + 2.5 \\ 0.5x &= 4 \\ x &= 4 \div 0.5 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Todos los coeficientes y términos decimales se transforman a números enteros al multiplicar por 10 ambos miembros de la ecuación. Se debe multiplicar todos los términos porque se aplica la **Propiedad 3** de una igualdad.

Para convertir en entero los números decimales en la ecuación, se eligió la potencia de 10 con igual cantidad de ceros que el término con mayor cantidad de cifras a la derecha del punto decimal.

C

Para resolver ecuaciones que tienen coeficientes y términos decimales es conveniente transformar a ecuaciones con coeficientes enteros, multiplicando cada uno de los términos por 10, 100, 1 000 o según el número máximo de decimales que presenten los términos, luego se despeja la x.

E

Resuelve la ecuación: $0.25 - 0.02x = 0.03x + 0.2$.

Solución.

$$\begin{aligned} 0.25 - 0.02x &= 0.03x + 0.2 \\ 25 - 2x &= 3x + 20 \\ -2x - 3x &= 20 - 25 \\ -5x &= -5 \\ x &= \frac{-5}{-5} \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $0.3x - 0.2 = 3.4$ $x = 12$

b) $0.05x - 0.15 = 0.5$ $x = 13$

c) $1.1x + 1.7 = 0.6x + 0.2$ $x = -3$

d) $0.02x + 0.04 = 0.18 - 0.05x$ $x = 2$

Indicador de logro

2.13 Resuelve una ecuación de primer grado con coeficientes y términos decimales.

Secuencia

Para esta clase se aborda la solución de ecuaciones que tienen términos y coeficientes decimales. Los estudiantes en primaria aprendieron sobre las potencias de 10 por lo que se hace uso de ese hecho para mostrar la forma de resolver una ecuación con esta característica. Opcionalmente se puede mostrar la forma de resolver la ecuación sin hacer uso de las potencias de 10 y utilizando los conocimientos de operaciones con decimales que los estudiantes adquirieron en primaria.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Resolver la ecuación convirtiendo los términos y coeficientes decimales a enteros. Los estudiantes ya conocen las potencias de 10 y las propiedades de una igualdad por lo que cuentan con las herramientas necesarias para resolver el problema. También se puede hacer referencia a los recuadros de pista y presaber para que les sirvan como apoyo. La ecuación puede ser resuelta de una segunda forma en la que no se multiplique por una potencia de 10, y en todo el proceso se realicen operaciones con decimales. Esta solución es igualmente válida.

Ⓒ Establecer que una manera de resolver una ecuación que tiene términos y coeficientes decimales es multiplicar ambos miembros por una potencia de 10. Si algún estudiante ha resuelto la ecuación sin multiplicar por la potencia de 10, es importante aclarar que este proceso es igualmente válido.

Solución de algunos ítems:

a) $0.3x - 0.2 = 3.4$
$3x - 2 = 34$
$3x = 34 + 2$
$3x = 36$
$x = 12$

d) $0.02x + 0.04 = 0.18 - 0.05x$
$2x + 4 = 18 - 5x$
$2x + 5x = 18 - 4$
$7x = 14$
$x = 2$

Fecha: **U5 2.13**

Ⓟ Resuelve:
$0.5x - 2.5 = 1.5$

Si los números fueran enteros sería más fácil despejar x.

Ⓢ Se puede resolver de dos formas:

Cambiando a enteros
$0.5x - 2.5 = 1.5$
$10(0.5x - 2.5) = 10 \times 1.5$
$10 \times 0.5x - 10 \times 2.5 = 15$
$5x = 40$
$x = 40 \div 5$
$x = 8$

Con decimales
$0.5x - 2.5 = 1.5$
$0.5x = 1.5 + 2.5$
$0.5x = 4$
$x = 4 \div 0.5$
$x = 8$

Se eligió la potencia de 10 con igual cantidad de ceros que el término con mayor cantidad de cifras a la derecha del punto decimal.

Ⓔ Se multiplica por 100
$0.25 - 0.02x = 0.03x + 0.2$
$25 - 2x = 3x + 20$
$-2x - 3x = 20 - 25$
$-5x = -5$
$x = \frac{-5}{-5}$
$x = 1$

Ⓡ a) $x = 12$ b) $x = 13$

c) $x = -3$ d) $x = 2$

Tarea: página 104 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 2

2.14 Ecuaciones con términos y coeficientes fraccionarios

P

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{1}{3}x - 5 = \frac{1}{6}x$

b) $\frac{x-2}{2} = \frac{1}{4}x$

Si los números fueran enteros sería más fácil despejar x.

S

El mcm de 3 y 6 es 6.

a)
$$\frac{1}{3}x - 5 = \frac{1}{6}x$$
$$6\left(\frac{1}{3}x - 5\right) = 6 \times \frac{1}{6}x$$
$$6 \times \frac{1}{3}x - 6 \times 5 = 6 \times \frac{1}{6}x$$
$$\frac{6}{3}x - 30 = \frac{6}{6}x$$
$$2x - 30 = x$$
$$2x - x = 30$$
$$x = 30$$

El mcm de 2 y 4 es 4.

b)
$$\frac{x-2}{2} = \frac{1}{4}x$$
$$4 \times \frac{x-2}{2} = 4 \times \frac{1}{4}x$$
$$\frac{4}{2}(x-2) = \frac{4}{4}x$$
$$2(x-2) = x$$
$$2x - 4 = x$$
$$2x - x = 4$$
$$x = 4$$

Para transformar dos o más fracciones en enteros, se multiplican por el mcm de los denominadores. En una ecuación al multiplicar ambos miembros por el mcm, se coloca el signo de agrupación.

C

Para resolver ecuaciones con coeficientes y términos fraccionarios se convierten tanto los términos como los coeficientes en enteros, multiplicándolos por el mcm de los denominadores y luego se despeja x.

E

Resuelve la ecuación: $-\frac{x+2}{12} = \frac{1}{24}x$

Solución.

$$-\frac{x+2}{12} = \frac{1}{24}x$$
$$24 \times \left(-\frac{x+2}{12}\right) = 24 \times \frac{1}{24}x$$
$$-\frac{24}{12}(x+2) = \frac{24}{24}x$$
$$-2(x+2) = x$$
$$-2x - 4 = x$$
$$-2x - x = 4$$
$$-3x = 4$$
$$x = -\frac{4}{3}$$

No cometas el siguiente error:

$-2(x+2) = -2x + 2$ ¡Es incorrecto! ✗

$-2(x+2) = -2x - 4$ ¡Es correcto! ✓

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{1}{2}x - 3 = \frac{1}{4}x$
$x = 12$

b) $\frac{3}{4}x + 5 = \frac{1}{8}x$
$x = -8$

c) $\frac{x-3}{3} = \frac{1}{6}x$
$x = 6$

d) $\frac{4-x}{3} = \frac{x}{9}$
$x = 3$

e) $\frac{3}{5}x - 1 = -\frac{3}{10}x$
$x = \frac{10}{9}$

f) $-\frac{x+5}{2} = \frac{3}{4}$
$x = -\frac{13}{2}$

Unidad 5

Indicador de logro

2.14 Resuelve una ecuación con términos y coeficientes fraccionarios.

Secuencia

Para finalizar con las ecuaciones que tienen alguna característica especial se trabaja con las que tienen términos y coeficientes fraccionarios. Los estudiantes previamente han aprendido sobre el mcm, por lo que se hace uso de ese hecho para mostrar cómo resolver una ecuación con esta característica. Básicamente la idea es convertir las ecuaciones de este tipo en ecuaciones con términos y coeficientes enteros.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Resolver la ecuación convirtiendo los términos y coeficientes fraccionarios a enteros. Los estudiantes ya aprendieron el cálculo del mcm y las propiedades de una igualdad por lo que cuentan con las herramientas necesarias para resolver el problema. También se puede hacer referencia al recuadro de pista para que les sirva como apoyo.

Ⓒ Es importante hacer énfasis a los estudiantes de que no cometan el error: $-2(x + 2) = -2x + 2$, es decir, el número debe multiplicarse por los dos términos de la expresión algebraica, tal como se muestra en el libro de texto.

Solución de algunos ítems:

a) $\frac{1}{2}x - 3 = \frac{1}{4}x$

$$4 \times (\tfrac{1}{2}x - 3) = 4 \times \tfrac{1}{4}x$$
$$4 \times \tfrac{1}{2}x - 4 \times 3 = 4 \times \tfrac{1}{4}x$$
$$2x - 12 = x$$
$$2x - x = 12$$
$$x = 12$$

f) $-\frac{x + 5}{2} = \frac{3}{4}$

$$4 \times \left(-\tfrac{x + 5}{2}\right) = 4 \times \tfrac{3}{4}$$
$$-\tfrac{4}{2}(x + 5) = \tfrac{4}{4} \times 3$$
$$-2(x + 5) = 3$$
$$-2x - 10 = 3$$
$$-2x = 3 + 10$$
$$-2x = 13$$
$$x = -\tfrac{13}{2}$$

Fecha:

U5 2.14

Ⓟ Resuelve: a) $\frac{1}{3}x - 5 = \frac{1}{6}x$ b) $\frac{x - 2}{2} = \frac{1}{4}x$

Ⓢ

mcm: 6

a) $\frac{1}{3}x - 5 = \frac{1}{6}x$

$$6\left(\tfrac{1}{3}x - 5\right) = 6 \times \tfrac{1}{6}x$$
$$6 \times \tfrac{1}{3}x - 6 \times 5 = 6 \times \tfrac{1}{6}x$$
$$\tfrac{6}{3}x - 30 = \tfrac{6}{6}x$$
$$2x - 30 = x$$
$$2x - x = 30$$
$$x = 30$$

mcm: 4

b) $\frac{x - 2}{2} = \frac{1}{4}x$

$$4 \times \tfrac{x - 2}{2} = 4 \times \tfrac{1}{4}x$$
$$\tfrac{4}{2}(x - 2) = \tfrac{4}{4}x$$
$$2(x - 2) = x$$
$$2x - 4 = x$$
$$2x - x = 4$$
$$x = 4$$

Se calculó el mcm de los denominadores para multiplicar ambos miembros.

Ⓔ

$$-\tfrac{x + 2}{12} = \tfrac{1}{24}x$$
$$24 \times \left(-\tfrac{x + 2}{12}\right) = 24 \times \tfrac{1}{24}x$$
$$-\tfrac{24}{12}(x + 2) = \tfrac{24}{24}x$$
$$-2(x + 2) = x$$
$$-2x - 4 = x$$
$$-2x - x = 4$$
$$-3x = 4$$
$$-x = -\tfrac{4}{3}$$

Ⓡ

a) $x = 12$ b) $x = -8$

c) $x = 6$ d) $x = 3$

Tarea: página 105 del Cuaderno de Ejercicios.

2.15 Practica lo aprendido

Realiza lo que se te pide en cada numeral:

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3 + 4(x - 2) = -3 - 5(x - 5)$

$x = 3$

b) $3x + 5(x + 2) = 4(x + 3) + 6$

$x = 2$

c) $5 - 4(3x + 1) = 1 + 4(2x + 20)$

$x = -4$

d) $9(x - 3) = 2(x - 5) - 3$

$x = 2$

e) $5(2x - 3) - 6 = 4x + 3$

$x = 4$

f) $3(x - 2) + x = 5(x - 3) + 9$

$x = 0$

2. Resuelve:

a) $0.5x + 3 = 0.4x + 3.3$

$x = 3$

b) $3 + 0.8x = 2.4 + 0.9x$

$x = 6$

c) $0.2x - 0.03 = 0.17x + 0.21$

$x = 8$

d) $1.31x + 0.04 = 1.35x - 0.04$

$x = 2$

e) $0.05x - 0.034 = 0.015x + 0.0001$

$x = 1$

f) $2.25x + 1.97 = 3.75x - 4.03$

$x = 4$

3. Resuelve:

a) $\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$

$x = 10$

b) $-\frac{x}{3} - \frac{5}{6} = -\frac{4}{3}$

$x = \frac{3}{2}$

c) $-\frac{1}{4}x = \frac{5}{4}x + \frac{5}{8}$

$x = -\frac{5}{12}$

d) $\frac{7}{24} + \frac{5}{12} = 2x$

$x = \frac{17}{48}$

e) $\frac{x+1}{2} = \frac{x}{4}$

$x = -2$

f) $\frac{5x-4}{3} = -\frac{1}{6}$

$x = \frac{7}{10}$

g) $-\frac{x+3}{2} - \frac{x}{4} = \frac{3}{2}$

$x = -4$

h) $\frac{x+5}{12} = \frac{x+7}{24}$

$x = -3$

Indicador de logro

2.15 Resuelve problemas correspondientes a ecuaciones de primer grado.

Solución de algunos ítems:

1. a) $3 + 4(x - 2) = -3 - 5(x - 5)$
$$3 + 4x - 8 = -3 - 5x + 25$$
$$4x - 5 = -5x + 22$$
$$4x + 5x = 5 + 22$$
$$9x = 27$$
$$x = 3$$

1. f) $3(x - 2) + x = 5(x - 3) + 9$
$$3x - 6 + x = 5x - 15 + 9$$
$$4x - 6 = 5x - 6$$
$$4x - 5x = -6 + 6$$
$$-x = 0$$
$$x = 0$$

2. a) $0.5x + 3 = 0.4x + 3.3$
$$5x + 30 = 4x + 33$$
$$5x - 4x = 33 - 30$$
$$x = 3$$

2. f) $2.25x + 1.97 = 3.75x - 4.03$
$$225x + 197 = 375x - 403$$
$$225x - 375x = -403 - 197$$
$$-150x = -600$$
$$x = 4$$

3. a) $\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$
$$4 \times \frac{1}{2}x = 4 \times \frac{1}{4}x + 4 \times \frac{5}{2}$$
$$2x = x + 10$$
$$2x - x = 10$$
$$x = 10$$

3. h) $\frac{x+5}{12} = \frac{x+7}{24}$
$$24 \times \left(\frac{x+5}{12}\right) = 24 \times \left(\frac{x+7}{24}\right)$$
$$2(x + 5) = x + 7$$
$$2x + 10 = x + 7$$
$$2x - x = 7 - 10$$
$$x = -3$$

Tarea: página 106 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 3 Aplicación de ecuaciones de primer grado

3.1 Aplicación de ecuaciones utilizando una propiedad de las igualdades

P

Resuelve las siguientes situaciones:

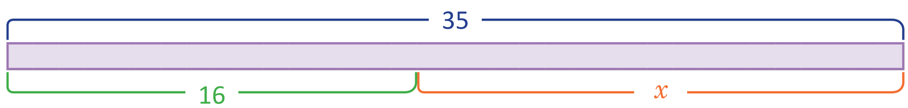
1. Para jugar en un campo de fútbol privado se paga una membresía de 16 dólares y por cada vez que se use se paga un dólar más, ¿cuántas veces se ha usado si se ha pagado 35 dólares?

Antes de escribir la ecuación te puedes auxiliar de un gráfico.

2. Al restarle 8 al número x, resulta –3. Encuentra x.

S

1.

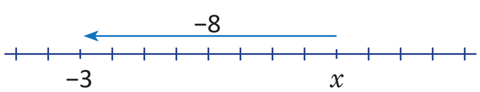


Sea x: El número de veces que ha usado la cancha.

$$16 + x = 35$$
$$x = 35 - 16$$
$$x = 19$$

R: Se ha usado 19 veces.

2.



Sea x: El número buscado.

$$x - 8 = -3$$
$$x = -3 + 8$$
$$x = 5$$

R. El número es 5.

C

Para resolver problemas mediante la aplicación de ecuaciones de primer grado se tiene que

1: Definir qué cantidad se representa con la incógnita.
2: Escribir la ecuación.
3: Resolver la ecuación.
4: Dar la respuesta.

Resuelve los siguientes problemas:

1. Un comerciante hace un balance de pérdidas y ganancias cada trimestre. Si en el primer mes tuvo una ganancia de 1,800 dólares, en el segundo mes una pérdida de 600 dólares, y en el total del trimestre tuvo una ganancia de 7,000 dólares, ¿cuánto había ganado o perdido en el tercer mes?

   Ganó 5,800 dólares

2. Al restarle 5 al número x, resultó –12. Determina el valor de x.

   El valor de x es –7

Indicador de logro

3.1 Resuelve una situación del entorno aplicando una ecuación de primer grado que se resuelve utilizando una propiedad de una igualdad.

Secuencia

En esta lección se trabajará la aplicación de las ecuaciones de primer grado a situaciones del entorno. Para resolverlas se utiliza una propiedad de una igualdad.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Dar respuesta a las interrogantes de cada uno de los numerales a través de la aplicación de ecuaciones de primer grado que se resuelven utilizando una propiedad de las igualdades; en la aplicación es importante elegir convenientemente la cantidad que se representa con la incógnita y aclarar que representa a la misma. También es importante orientar a los estudiantes sobre la elaboración de un gráfico o dibujo que puede servir como un apoyo para encontrar una respuesta a la interrogante planteada.

Solución de algunos ítems:

1. Sea x la pérdida o ganancia en dólares en el tercer mes.

$$1{,}800 + (-600) + x = 7{,}000$$
$$1{,}800 - 600 + x = 7{,}000$$
$$1{,}200 + x = 7{,}000$$
$$1{,}200 + x = 7{,}000$$
$$x = 7{,}000 - 1{,}200$$
$$x = 5{,}800$$

Ganó 5,800 dólares.

2. Sea x el número buscado.

$$x - 5 = -12$$
$$x = -7$$

El número buscado es –7.

Fecha: **U5 3.1**

Ⓟ Resuelve:

1. Precio de membresía de la cancha: \$16.
   Tarifa por uso: \$1.
   ¿Cuántas veces se ha usado si se han pagado 35 dólares?
2. Al restarle 8 al número x, resulta –3. Encuentra x.

Ⓢ 1. Sea x el número de veces que ha usado la cancha.

$$16 + x = 35$$
$$x = 35 - 16$$
$$x = 19$$

R. Se ha usado 19 veces.

2. Sea x el número buscado.

$$x - 8 = -3$$
$$x = -3 + 8$$
$$x = 5$$

R. El número es 5.

Ⓡ 1.
Sea x la pérdida o ganancia en dólares en el tercer mes.

$$1{,}800 + (-600) + x = 7{,}000$$
$$x = 5{,}800$$

Ganó 5,800 dólares.

2.
Sea x el número buscado.

$$x - 5 = -12$$
$$x = -7$$

El número buscado es –7.

Tarea: página 107 del Cuaderno de Ejercicios.

3.2 Aplicación de ecuaciones utilizando más de una propiedad de las igualdades

P

Responde la pregunta en la siguiente situación:

Miguel tiene una plantación de papaya, él ha cortado 3 árboles debido a que estaban produciendo frutos de mala calidad. Cada uno de los árboles restantes tiene 5 papayas cada uno, produciendo una cosecha total de 355. ¿Cuántos árboles tenía Miguel al principio?

S

En la situación lo primero que se debe determinar es la variable, para luego establecer las cantidades que guardan una relación de igualdad. En este caso, la cantidad de árboles por la cantidad de papayas que produce un solo árbol es igual a la cantidad total de papayas producidas, de manera que el proceso de solución de la situación es:

Sea x : El número de árboles que tenía Miguel inicialmente.

Cantidad de árboles de papaya	x
Cantidad de árboles restantes	$x - 3$
Cantidad de papayas	$5(x - 3)$

$$5(x - 3) = 355$$
$$5x - 15 = 355$$
$$5x = 355 + 15$$
$$5x = 370$$
$$x = 74$$

R. 74 árboles

Resuelve los siguientes problemas utilizando ecuaciones de primer grado:

1. En una microempresa se alcanzó la meta de venta y el dueño decidió pagar 50 dólares más de la base salarial a cada trabajador. Para pagar a 3 trabajadores se necesitó 1,425 dólares, ¿cuál es la base salarial de cada trabajador?
   La base salarial de cada trabajador es 425 dólares
2. Antonio es ejecutivo de ventas de teléfonos, como no vendía; decidió hacer un descuento de 20 dólares, vendiendo así 12 unidades y la venta total alcanzó 2,400 dólares. ¿Cuánto costaba el teléfono antes del descuento?
   El teléfono sin descuento cuesta 220 dólares
3. Ana tiene una librería, ella obtiene $5 de ganancia por cada libro que vende y sus gastos mensuales de funcionamiento son de $200, ¿cuál es el mínimo número de libros que se debe vender?
   Debe vender como mínimo 41 libros

Indicador de logro

3.2 Resuelve una situación del entorno aplicando una ecuación de primer grado que se resuelve utilizando más de una propiedad de una igualdad.

Secuencia

Para esta clase se aplican ecuaciones que requieren la utilización de más de una propiedad de una igualdad para su solución; se difiere con la estructura de las clases anteriores por el hecho de que no cuenta con una Ⓒ, pero esto se debe a que en la clase anterior se establecieron los pasos para la aplicación de una ecuación para resolver un problema del entorno.

Propósito

Ⓟ Practicar la aplicación de ecuaciones que se resuelven aplicando más de una propiedad a situaciones del entorno.

Solución de algunos ítems:

1. Sea x la base salarial de cada trabajador.

$$
\begin{aligned}
3(x + 50) &= 1,425\\
3x + 150 &= 1,425\\
3x &= 1,425 - 150\\
3x &= 1,275\\
x &= 425
\end{aligned}
$$

La base salarial de cada trabajador es 425 dólares.

2. Sea x el costo del teléfono sin descuento.

$$
\begin{aligned}
12(x - 20) &= 2,400\\
12x - 240 &= 2,400\\
12x &= 2,400 + 240\\
12x &= 2,640\\
x &= 220
\end{aligned}
$$

El costo del teléfono sin el descuento es 220 dólares.

3. Sea x la cantidad mínima de libros que debe vender.

$$
\begin{aligned}
5x &= 200\\
x &= 200 \div 5\\
x &= 40
\end{aligned}
$$

Con 40 libros obtiene justamente lo que invierte mensualmente por lo que debe vender como mínimo 41 libros para empezar a tener ganancias.

Fecha:

U5 3.2

Ⓟ Se han cortado 3 árboles. Cada árbol restante tiene 5 papayas. La cosecha total después de cortar los árboles es 355 papayas. ¿Cuántos árboles había al principio?

Ⓢ Sea x el número de árboles que tenía Miguel inicialmente.

$$
\begin{aligned}
5(x - 3) &= 355\\
5x - 15 &= 355\\
5x &= 355 + 15\\
5x &= 370\\
x &= 74
\end{aligned}
$$

R. 74 árboles

Ⓡ 1. Sea x la base salarial de cada trabajador.

$$
\begin{aligned}
3(x + 50) &= 1,425\\
x &= 425
\end{aligned}
$$

La base salarial de cada trabajador es 425 dólares.

2. Sea x el costo del teléfono sin descuento.

$$
\begin{aligned}
12(x - 20) &= 2,400\\
x &= 220
\end{aligned}
$$

El costo del teléfono sin el descuento era 220 dólares.

Tarea: página 108 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 3

3.3 Aplicación de ecuaciones que incluye una incógnita en términos de otra

P

Responde la pregunta en la siguiente situación:

José trabaja a medio tiempo en una ferretería donde le pagan 4 dólares por día, si trabaja día de semana (de lunes a viernes); 6 dólares por día, si es fin de semana (sábado y domingo). Si en el mes trabajó 20 días y le pagaron 84 dólares, ¿cuántos días de semana y fines de semana trabajó?

S

En la situación lo primero que se debe determinar es la variable, para luego establecer las cantidades que guardan una relación de igualdad; en este caso, la cantidad de dinero que gana José. Los días de trabajo en la semana, más lo que gana trabajando los días de fin de semana, es su pago mensual. De manera que el proceso de solución de la situación es:

Sea x : El número de días de semana que José trabajó.

	Días de semana	Día de fin de semana
Número de días	x	$20 - x$
Pago	$4x$	$6(20 - x)$
Pago Total	$4x + 6(20 - x)$	

$$4x + 6(20 - x) = 84$$
$$4x + 120 - 6x = 84$$
$$120 - 2x = 84$$
$$-2x = 84 - 120$$
$$-2x = -36$$
$$x = 18$$

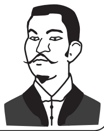
R. 18 días semana y 2 días de fines de semana.

Se dice que Diofantos resolvía ecuaciones seleccionando incógnitas de manera muy efectiva.

Por ejemplo: "Hay dos números. Uno es 20 unidades mayor que el otro y la suma de ambos es 80. Encuentralos." Para resolver esta ecuación, Diofantos consideró al número mayor "$x + 10$", y al número menor "$x - 10$".

Otro ejemplo: "Hay tres números. La suma de dos de estos tres números es 20, 30 y 40 respectivamente. Encuentra cada uno de los tres números". Para resolver esto, él consideró la suma de tres números "x", y representó los tres números como "$x - 40$", "$x - 30$" y "$x - 20$".

Keirinkan. (2015). *Guía para el maestro*.



Resuelve los siguientes problemas utilizando ecuaciones de primer grado:

1. Una empresa que se dedica al transporte de mercadería cobra por peso en libras. Ellos trasportan 5 reproductores de DVD y 8 televisores LCD, que pesan en total 106 libras, y se sabe que un televisor pesa 10 libras más que un DVD. Al momento de facturar los trabajadores notan que olvidaron tomar el peso por unidad de cada tipo de electrodoméstico. ¿Cuál es el peso de un reproductor y un televisor?
   El reproductor pesa 2 libras y el televisor 12 libras

2. La suma de dos números naturales consecutivos es 13, ¿cuáles son los números?
   Los números son 6 y 7

3. La suma de tres números consecutivos es 18, ¿cuáles son los números?
   Los números son 5, 6 y 7

Indicador de logro

3.3 Aplica una ecuación de primer grado con una incógnita en términos de otra a una situación del entorno.

Secuencia

Siguiendo con la secuencia de la aplicación de diferentes tipos de ecuaciones de primer grado a situaciones del entorno; para esta clase se utilizan ecuaciones que tienen una incógnita en términos de otra.

Propósito

Ⓟ Practicar la aplicación de ecuaciones que se resuelven aplicando más de una propiedad a situaciones del entorno. Solución de los ítems.

Solución de algunos ítems:

1. Sea x el peso de un reproductor de DVD.
   Por tanto: $x + 10$ el peso de un televisor.
   $$5x + 8(x + 10) = 106$$
   $$5x + 8x + 80 = 106$$
   $$13x = 106 - 80$$
   $$13x = 26$$
   $$x = 2$$
   Peso de un televisor.
   $$x + 10 = 2 + 10$$
   $$= 12$$
   El reproductor de DVD pesa 2 libras y el televisor 12 libras.

2. Sea x el primer número.
   Por tanto: $x + 1$ es el otro número.
   $$x + (x + 1) = 13$$
   $$x + x + 1 = 13$$
   $$2x = 13 - 1$$
   $$2x = 12$$
   $$x = 6$$
   El otro número:
   $$x + 1 = 6 + 1$$
   $$= 7$$
   Los números son 6 y 7.

3. Sea x el primer número.
   Por tanto:
   $x + 1$ el segundo número y
   $x + 2$ el tercer número.
   $$x + (x + 1) + (x + 2) = 18$$
   $$x + x + 1 + x + 2 = 18$$
   $$3x + 3 = 18$$
   $$3x = 18 - 3$$
   $$3x = 15$$
   $$x = 5$$
   Segundo número.
   $$x + 1 = 5 + 1$$
   $$= 6$$
   Tercer número.
   $$x + 2 = 5 + 2$$
   $$= 7$$

Fecha: **U5 3.3**

Ⓟ Pago día de semana: \$4
Pago día de fin de semana: \$6
Si en el mes trabajó 20 días y le pagaron 84 dólares, ¿cuántos días de semana y fines de semana trabajó?

Ⓢ Sea x el número de días de semana que José trabajó.

$$4x + 6(20 - x) = 84$$
$$4x + 120 - 6x = 84$$
$$120 - 2x = 84$$
$$-2x = 84 - 120$$
$$-2x = -36$$
$$x = 18$$

R. 18 días de semana y 2 días de fines de semana.

Ⓡ 1. Sea x el peso de un reproductor de DVD.

Por tanto $x + 10$ el peso de un televisor.
$$5x + 8(x + 10) = 106$$
$$x = 2$$
Peso de un televisor
$$x + 10 = 2 + 10$$
$$= 12$$
El reproductor pesa 2 libras y el televisor 12 libras.

Tarea: página 109 del Cuaderno de Ejercicios.

3.4 Aplicación de ecuaciones con variables en ambos miembros

P

Responde la pregunta de la siguiente situación:

Carlos irá al gimnasio por 5 meses; le cobrarán 20 dólares por mes sin membresía, pero si la adquiere, pagará una cuota única de 30 dólares y 10 dólares por mes, ¿después de cuántos meses habrá gastado la misma cantidad de dinero con o sin membresía?, ¿le conviene pagar la membresía según el tiempo que ha planificado entrenar?

S

Como se busca el número de meses que pasan hasta haber gastado la misma cantidad de dinero indiferentemente de la modalidad, se establece que la incógnita representa el número de meses que han pasado. Luego, el gasto mensual que se tendría, según la modalidad sería de \$20 o \$10 por la cantidad de meses, según sea sin o con membresía respectivamente. La igualdad se establece entre el gasto total sin haber adquirido la membresía y si se adquiriera la membresía.

Sea x: Cantidad de meses que han pasado hasta haber pagado la misma cantidad de dinero.

	Sin membresía	Con membresía
Cuota única	0	30
Cuota mensual	20	10
Gasto Total	$20x$	$30 + 10x$

$$
\begin{aligned}
20x &= 30 + 10x\\
20x - 10x &= 30\\
10x &= 30\\
x &= 3
\end{aligned}
$$

R. En el mes 3 el gasto es el mismo con o sin membresía. Para que le salga más barato le conviene adquirir la membresía dado que irá por 5 meses.

Responde la pregunta de cada una de las siguientes situaciones:

1. El parqueo privado A cobra una cuota de un dólar por hora y el parqueo B cobra 2 dólares por el derecho de estacionamiento y 0.50 de dólar por cada hora que se utilice, ¿cuántas horas deben transcurrir para que el costo en ambos parqueos sea el mismo?
   El costo es el mismo a las 4 horas
2. Marta renta un equipo multimedia a 20 dólares por día de uso, más una cuota única de 10 dólares cuando se retira el equipo del local. José tiene un negocio del mismo tipo en el que cobra 18 dólares por día de uso del equipo, más una cuota única de 26 dólares al retirarlo, ¿a los cuántos días el costo del alquiler es el mismo en los dos negocios?, si una persona desea alquilar el equipo por 5 días, ¿en qué negocio debe alquilarlo?
   El costo es el mismo a los 8 días, por 5 días es mejor alquilar con Marta
3. En una escuela hay dos cisternas, la primera tiene 200 galones, la segunda 328 y tienen una fuga de 2 y 4 galones, respectivamente por cada semana. Si las cisternas no tienen uso, ¿cuántas semanas tendrán que pasar para tener la misma cantidad de agua?
   A las 64 semanas tendrán la misma cantidad

Indicador de logro

3.4 Resuelve una situación del entorno aplicando una ecuación de primer grado con la incógnita en ambos miembros.

Secuencia

En esta clase se usan ecuaciones con miembros en ambos términos para resolver problemas del entorno.

Propósito

Ⓟ Resolver situaciones del entorno aplicando ecuaciones que se resuelven utilizando más de una propiedad. Solución de los ítems.

Solución de algunos ítems:

1. Sea x la cantidad de horas que se usa el parqueo.

$$\begin{aligned} x &= 2 + 0.5x \\ 10x &= 20 + 5x \\ 10x - 5x &= 20 \\ 5x &= 20 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

El costo es el mismo a las 4 horas de uso.

2. Sea x la cantidad de días que se renta el equipo.

$$\begin{aligned} 20x + 10 &= 18x + 26 \\ 20x - 18x &= 26 - 10 \\ 2x &= 16 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

El costo es el mismo al rentarlo durante 8 días.

Marta

$$\begin{aligned} 20x + 10 &= 20 \times 5 + 10 \\ &= 100 + 10 \\ &= 110 \end{aligned}$$

José

$$\begin{aligned} 18x + 26 &= 18 \times 5 + 26 \\ &= 90 + 26 \\ &= 116 \end{aligned}$$

Para 5 días es mejor alquilar con Marta, porque el costo es menor.

3. Sea x la cantidad de semanas.

$$\begin{aligned} 200 - 2x &= 328 - 4x \\ -2x + 4x &= 328 - 200 \\ 2x &= 128 \\ x &= 64 \end{aligned}$$

Estarán al mismo nivel en 64 semanas.

Fecha: **U5 3.4**

Ⓟ ¿Después de cuántos meses se habrá gastado la misma cantidad de dinero con o sin membresía? ¿Conviene pagar la membresía según el tiempo que se ha planificado entrenar?

Ⓢ Sea x la cantidad de meses que han pasado hasta haber pagado la misma cantidad de dinero.

$$\begin{aligned} 20x &= 30 + 10x \\ 20x - 10x &= 30 \\ 10x &= 30 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

R. En el mes 3 el gasto es el mismo con o sin membresía. Para que le salga más barato le conviene adquirir la membresía dado que irá por 5 meses.

Ⓡ 1. Sea x la cantidad de horas que se usa el parqueo. $x = 2 + 0.5x$

$x = 4$

El costo es el mismo a las 4 horas de uso.

2. Sea x la cantidad de días que se renta el equipo. $20x + 10 = 18x + 26$

$x = 8$

El costo es el mismo al rentarlo durante 8 días.

Marta: 110 José: 116

Para 5 días es mejor alquilar con Marta, porque el costo es menor.

Tarea: página 110 del Cuaderno de Ejercicios.

3.5 Aplicaciones en situaciones de distancia, velocidad y tiempo

P

Responde las preguntas de la siguiente situación:

Marta salió de su casa para la escuela. Julia, su hermana, salió 4 minutos más tarde. La velocidad de Marta fue de 30 m/min y la de Julia fue de 50 m/min. ¿En cuántos minutos alcanzó Julia a Marta? Si la distancia entre la casa y la escuela fueran 280 m, ¿Julia puede alcanzar a Marta en el camino?

Distancia = Velocidad × Tiempo
Tiempo = Distancia ÷ Velocidad
Velocidad = Distancia ÷ Tiempo

Cuando Julia alcanza a Marta es cuando las dos han caminado la misma distancia desde su casa.

Si el número de minutos que han transcurrido mientras camina Julia es x entonces el tiempo para Marta será $x + 4$ minutos.

S

Se define x como el número de minutos que camina Julia, luego se hace una tabla que resume los datos y por último se plantea y resuelve la ecuación.

Sea x : El número de minutos transcurridos mientras camina Julia.

	Marta	Julia
Velocidad	30 m/min	50 m/min
Tiempo	$x + 4$	x
Distancia	$30(x + 4)$	$50x$

$$30(x+4) = 50x$$
$$30x + 120 = 50x$$
$$30x - 50x = -120$$
$$-20x = -120$$
$$x = 6$$

R. 6 minutos

Sabiendo que Julia alcanza a Marta en 6 minutos se debe comprobar si en efecto Julia alcanzaría a Marta ajustándose a las condiciones de la situación. De manera que, si la distancia entre la casa y la escuela fueran 280 m, Julia no podría alcanzar a Marta porque, 6 × 50 = 300 m que es mayor que 280 m.

Responde la pregunta de cada una de las siguientes situaciones:

1. a) Un vehículo sale de la ciudad "A" con una velocidad de 60 km/h; 2 horas más tarde sale de la misma ciudad otro vehículo, siguiendo al primero, con una velocidad de 90 km/h, ¿en cuántas horas alcanza el otro vehículo al primero? a) Luego de 4 horas
   b) Si la distancia entre la ciudad A y una ciudad B fuera 350 km, ¿logrará el segundo auto alcanzar al primero? b) No logra alcanzarlo

2. Entre dos cantones A y B hay un solo camino de 900 m. Antonio sale del cantón A hacia el B con una velocidad de 60 m/min y Carlos sale del cantón B hacia A con una velocidad de 40 m/min. Si han salido al mismo tiempo, ¿en cuántos minutos se encontrarán? Se encuentran luego de 9 minutos

3. Una laguna tiene 1 600 m de perímetro, Ana corre con una velocidad de 150 m/min en dirección horaria, mientras que José corre con una velocidad de 175 m/min en sentido antihorario. Si ambos salen del mismo punto, pero José lo hace 2 minutos después que Ana, ¿en cuántos minutos después de la salida de José se vuelven a encontrar? Se vuelven a encontrar en 4 minutos

Indicador de logro

3.5 Aplica una ecuación de primer grado a una situación de distancia, velocidad y tiempo.

Secuencia

Para esta clase las situaciones propuestas involucran conceptos de distancia, velocidad y tiempo. Se utiliza el hecho de que los estudiantes ya aprendieron previamente el uso de fórmulas para realizar cálculos en situaciones de este tipo como apoyo para que el estudiante plantee una ecuación adecuada según la situación.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Tomar en cuenta las condiciones de la situación para considerar como válida la solución de una ecuación en una situación determinada. Como muestra este problema, la solución de una ecuación, no necesariamente es la respuesta a la situación planteada, ya que su validez depende de las condiciones establecidas, es decir, a pesar de que al resolver la ecuación se sabe que Julia alcanzará a Marta en 6 minutos, esto no sucederá, puesto que Marta ya habrá llegado a la escuela antes de que Julia la alcance, porque 300 > 280.

Solución de algunos ítems:

1. a) Sea $x + 2$ la cantidad de horas que ha recorrido el vehículo A.
Por tanto x es la cantidad de horas que ha recorrido el otro vehículo.

$$\begin{aligned} 60(x + 2) &= 90x \\ 60x + 120 &= 90x \\ 60x - 90x &= -120 \\ -30x &= -120 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Luego de que el segundo vehículo salga, tardará 4 horas en alcanzarlo.

$$\begin{aligned} 60(x + 2) &= 60(4 + 2) \\ &= 60(6) \\ &= 360 \end{aligned}$$

b) No logra alcanzarlo, en ese tiempo el vehículo A habrá recorrido 360 km.

3. Sea x el tiempo que ha corrido José.
Por tanto $x + 2$ el tiempo de Ana.

$$\begin{aligned} 150(x + 2) + 175x &= 1\,600 \\ 150x + 300 + 175x &= 1\,600 \\ 325x &= 1\,600 - 300 \\ 325x &= 1\,300 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

En el sentido estricto, el concepto de la velocidad contiene el sentido del movimiento; en esta clase se utiliza esta palabra solo para indicar la rapidez.

Fecha: **U5 3.5**

Ⓟ Julia salió 4 minutos más tarde siguiendo a su hermana Marta. La velocidad de Marta fue de 30 m/min y la de Julia fue de 50 m/min. ¿En cuántos minutos alcanzó Julia a Marta?, si la distancia entre la casa y la escuela fuera de 280 m, ¿Julia puede alcanzar a Marta en el camino?

Ⓢ Sea x el número de minutos transcurridos mientras camina Julia.

$$\begin{aligned} 30(x + 4) &= 50x \\ 30x + 120 &= 50x \\ 30x - 50x &= -120 \\ -20x &= -120 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

R. 6 minutos

De manera que, si la distancia entre la casa y la escuela fuera de 280 m, Julia no podría alcanzar a Marta porque:
$6 \times 50 = 300$ m que es mayor que 280 m.

Ⓡ 1.

a) Sea $x + 2$ la cantidad de horas que ha recorrido el vehículo A.
Por tanto x es la cantidad de horas que ha recorrido el otro vehículo. $60(x + 2) = 90x$
$x = 4$
El 2º. vehículo tardará 4 h en alcanzar a A.

b) No logra alcanzarlo, en ese tiempo A habrá recorrido 360 km.

Tarea: página 111 del Cuaderno de Ejercicios.

3.6 Aplicaciones en situaciones de proporcionalidad directa, parte 1

P

Si se tiene la proporción:

$$3:b = 6:d$$
$$\frac{3}{b} = \frac{6}{d}$$
$$\frac{3}{b} \times bd = \frac{6}{d} \times bd$$
$$3d = 6b$$

En la proporción $3:b = 6:d$ tienes que

$$\overbrace{3:b = 6:d}^{\text{Extremos}}$$
$$\underbrace{b = 6}_{\text{Medios}}$$
$$3d = 6b$$

De tal forma que la proporción $3:b = 6:d$ representa la igualdad $3d = 6b$; es decir, el producto de los extremos es igual al producto de los medios. A esta propiedad se le llama **Propiedad Fundamental de las proporciones**.

Aplicando lo anterior, responde a la pregunta de la siguiente situación:

Al comer 3 pupusas de frijol con queso se consumen 990 calorías, ¿cuántas calorías se consumen si se comen 5?, escribe la proporción.

S

Sea x : El número de calorías.

$$3:5 = 990:x$$
$$3x = 5 \times 990$$
$$3x = 4\,950$$
$$x = 1\,650$$

R. 1 650 calorías

C

Si se aplica la propiedad fundamental en proporciones que tienen una incógnita se puede formular una ecuación de primer grado.

E

Marta utiliza 42 cm de cinta adhesiva para forrar 2 cajas con papel lustre. Si tiene 231 cm de cinta, ¿cuántas cajas podrá forrar si son exactamente iguales? Utiliza la propiedad fundamental de proporciones para escribir la ecuación.

Solución.

Sea x : el número de cajas que se puede envolver.

$$42 : 231 = 2 : x$$
$$42x = 2 \times 231$$
$$42x = 462$$
$$x = 11$$

R: 11 cajas

Responde las preguntas de las siguientes situaciones:

1. Para una celebración del día del niño en la escuela se decide comprar pastel, teniendo en cuenta que 3 pasteles alcanzan para 18 niños. ¿Cuántos pasteles se necesitan si hay 48 niños?
   Se necesitan 8 pasteles
2. Una máquina de envasado de líquidos llena 85 envases en 5 minutos, ¿cuántos envases se tendrán después de 13 minutos? Se tendrán 221 envases llenos

Indicador de logro

3.6 Resuelve una situación de proporcionalidad directa con una ecuación de primer grado.

Secuencia

La aplicación de ecuaciones de primer grado a situaciones de proporcionalidad directa se divide en tres partes. En esta clase se desarrolla la parte 1, previamente se presenta la propiedad fundamental de la proporcionalidad, para que a partir de su aplicación se pueda resolver una ecuación y dar respuesta a la interrogante planteada en el problema.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Dar respuesta a la interrogante planteada en la situación a través de una ecuación formulada a partir de la aplicación de la propiedad fundamental de la proporcionalidad. La proporcionalidad a la cual se aplica la propiedad fundamental se establece a partir de la situación.
La propiedad fundamental se ofrece como una herramienta para que el estudiante la utilice cuando analice la situación, se debe aclarar que esta propiedad es únicamente aplicable a una proporción directa.
En el Ⓟ, en lugar de 990 calorías se debe hacer referencia a 990 kilocalorías.

Solución de algunos ítems:

1. Sea x la cantidad de pasteles que se necesitan.

$$18 : 48 = 3 : x$$
$$18x = 3 \times 48$$
$$18x = 144$$
$$x = 8$$

Se necesitan 8 pasteles para 48 niños.

2. Sea x la cantidad de envases que se tendrán.

$$5 : 13 = 85 : x$$
$$5x = 13 \times 85$$
$$5x = 1\,105$$
$$x = 221$$

Se tendrán 221 envases llenos en 13 minutos.

Fecha: **U5 3.6**

Ⓟ Si se tiene la proporción: $3 : b = 6 : d$

$$\frac{3}{b} = \frac{6}{d}$$
$$\frac{3}{b} \times bd = \frac{6}{d} \times bd$$

Propiedad fundamental $3d = 6b$

Aplicando lo anterior, responde:
Al comer 3 pupusas de frijol con queso se consumen 990 kilocalorías, ¿cuántas kilocalorías se consumen si se comen 5?

Ⓢ Sea x el número de kilocalorías.

$$3 : 5 = 990 : x$$
$$3x = 5 \times 990$$
$$3x = 4\,950$$
$$x = 1\,650$$

R. 1 650 kilocalorías

Ⓔ Sea x el número de cajas que se pueden envolver.

$$42 : 231 = 2 : x$$
$$42x = 2 \times 231$$
$$42x = 462$$
$$x = 11$$

R. 11 cajas

Ⓡ 1. Sea x la cantidad de pasteles que se necesitan.

$$18 : 48 = 3 : x$$
$$x = 8$$

Se necesitan 8 pasteles para 48 niños.

Tarea: página 112 del Cuaderno de Ejercicios.

3.7 Aplicaciones en situaciones de proporcionalidad directa, parte 2

P

Responde la pregunta de la siguiente situación:

Una máquina empaquetadora prepara 42 cajas de camisas en 7 días, ¿cuántas cajas se han empaquetado en 10 días?

S

Sea x: el número de cajas empaquetadas.

$$42:7 = x:10$$
$$42 \times 10 = 7x$$
$$420 = 7x$$
$$7x = 420$$
$$x = 60$$

R. 60 cajas

E

Despeja x en las siguientes proporciones:

a) $5:x = 10:14$

b) $4:3x = 2:15$

Solución.

a) $5:x = 10:14$

$5 \times 14 = 10x$

$70 = 10x$

$10x = 70$

$x = 7$

b) $4:3x = 2:15$

$4 \times 15 = 3x \times 2$

$60 = 6x$

$6x = 60$

$x = 10$

Responde las preguntas de cada una de las siguientes situaciones:

1. En sus horas sociales, José pintará los salones de clase de su escuela, se sabe que 5 galones son los que se usan para pintar 2 aulas. Si en la escuela hay 45 galones de pintura, ¿cuántas aulas se podrán pintar? (Considera que todas las aulas son de las mismas medidas).
   Se pueden pintar 18 aulas
2. En un mapa, 10 cm representa 12.5 km de la realidad. Si entre los puntos A y B del mapa, hay 24 cm, ¿cuántos kilómetros hay en realidad?
   Hay 30 kilómetros
3. Despeja x en las siguientes proporciones:

   a) $4:x = 48:24$
   $x = 2$

   b) $2x:36 = 2:12$
   $x = 3$

Unidad 5

Indicador de logro

3.7 Aplica a una situación de proporcionalidad directa una ecuación de primer grado con signos de agrupación.

Secuencia

Debido a que en la clase anterior se tomó un tiempo para el análisis de la deducción de la propiedad fundamental de la proporcionalidad, para esta clase se retoman situaciones como las de la clase anterior, para que los estudiantes sigan practicando el planteamiento de ecuaciones para este tipo de contextos y la aplicación de la propiedad fundamental como herramienta para la solución de ellas.

Solución de algunos ítems:

1. Sea x la cantidad de aulas que podrá pintar.

$$\begin{aligned} 5 : 45 &= 2 : x \\ 5x &= 2 \times 45 \\ 5x &= 90 \\ x &= 18 \end{aligned}$$

Podrá pintar 18 aulas.

2. Sea x la cantidad en kilómetros.

$$\begin{aligned} 10 : 24 &= 12.5 : x \\ 10x &= 24 \times 12.5 \\ 10x &= 300 \\ x &= 30 \end{aligned}$$

Hay 30 km de distancia.

3. a) $4 : x = 48 : 24$

$$\begin{aligned} 48x &= 4 \times 24 \\ 48x &= 96 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

b) $2x : 36 = 2 : 12$

$$\begin{aligned} 12 \times 2x &= 2 \times 36 \\ 24x &= 72 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Fecha:

U5 3.7

Ⓟ Una máquina empaquetadora prepara 42 cajas de camisas en 7 días, ¿cuántas cajas se han empaquetado en 10 días?

Ⓢ Sea x el número de cajas empaquetadas.

$$\begin{aligned} 42 : 7 &= x : 10 \\ 42 \times 10 &= 7x \\ 420 &= 7x \\ 7x &= 420 \\ x &= 60 \end{aligned}$$

R. 60 cajas

Ⓔ a) $5 : x = 10 : 14$

$$\begin{aligned} 5 \times 14 &= 10x \\ 70 &= 10x \\ 10x &= 70 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

b) $4 : 3x = 2 : 15$

$$\begin{aligned} 4 \times 15 &= 3x \times 2 \\ 60 &= 6x \\ 6x &= 60 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Ⓡ 1. Sea x la cantidad de aulas que podrá pintar.

$$\begin{aligned} 5 : 45 &= 2 : x \\ x &= 18 \end{aligned}$$

Podrá pintar 18 aulas.

Tarea: página 113 del Cuaderno de Ejercicios.

3.8 Aplicaciones en situaciones de proporcionalidad directa, parte 3

P

Mezclando café y leche a una razón de 5:2 se preparó 840 ml de una bebida, ¿cuántos mililitros de leche se usó?

S

Se puede responder la pregunta a través de dos formas.

Forma 1

Sea x : cantidad de leche en mililitros

$$\begin{aligned} 5:2 &= (840-x):x \\ 5x &= 2\times(840-x) \\ 5x &= 1\,680-2x \\ 7x &= 1\,680 \\ x &= 240 \end{aligned}$$

R. 240 ml

Forma 2

Sea x : cantidad de leche en mililitros

$$\begin{aligned} 2:7 &= x:840 \\ 2\times 840 &= 7x \\ 7x &= 1\,680 \\ x &= 240 \end{aligned}$$

La diferencia en la interpretación de las proporciones planteadas en cada una de las dos formas es que en la forma 1, la razón es de la cantidad de la leche respecto a la de café; y en la forma 2, la razón es de la cantidad de la leche respecto al total de la bebida.

E

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3:(2x+3) = 6.14$

b) $4:3 = 8:(3x-3)$

Solución.

a) $3:(2x+3) = 6:14$

$$\begin{aligned} 3\times 14 &= 6\times(2x+3) \\ 42 &= 6(2x+3) \\ 6(2x+3) &= 42 \\ 12x &= 24 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

b) $4:3 = 8:(3x-3)$

$$\begin{aligned} 4\times(3x-3) &= 3\times 8 \\ 4\times(3x-3) &= 24 \\ 12x-12 &= 24 \\ 12x &= 24+12 \\ 12x &= 36 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Responde las preguntas de las siguientes situaciones:

1. Hay un terreno de 63 manzanas y se ha dividido en regiones para cultivar caña y piña a una razón de 4:3, ¿cuánto mide la región para cultivar caña y la región para el cultivo de piña?
   36 manzanas para caña y 27 para piña
2. A un trabajador le pagarán 1 400 dólares por 12 semanas de trabajo. Si después de 9 semanas dejó su trabajo y le pagarán 900 dólares más una tarjeta de regalo para cambiarla en un supermercado, siendo que esa paga cubre el equivalente a las 9 semanas de trabajo, ¿cuánto es el valor de la tarjeta de regalo?
   El valor es 150 dólares
3. Resuelve las siguientes ecuaciones:
   a) $(x-1):2 = 12:8$
   $x = 4$
   b) $2:5 = (x+1):15$
   $x = 5$

Indicador de logro

3.8 Realiza sumas que tienen como sumandos al cero y a otro número no decimal ni fraccionario.

Secuencia

Para esta clase se retoman las situaciones de proporcionalidad directa, con la diferencia de que a partir de la proporcionalidad planteada la ecuación obtenida incluye una variable en términos de otra. Por lo que ahora se trabajará con situaciones que permiten practicar el planteamiento de proporciones que dan lugar a ecuaciones que tienen una variable en términos de otra.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Dar respuesta a la interrogante planteada a través del uso de una ecuación de primer grado con una incógnita en términos de otra. La ecuación se determina a través de la aplicación de la propiedad fundamental a la proporcionalidad implícita en la situación planteada. En este punto se debe aclarar que hay dos formas para encontrar la respuesta, en donde cada una de ellas parte de una decisión distinta de la incógnita. Se debe decir a los estudiantes que ambas respuestas son igualmente válidas.

Ⓔ Practicar la aplicación de la propiedad fundamental de la proporcionalidad cuando la incógnita aparece en dos términos.

Solución de algunos ítems:

1. Sea x el área para cultivar caña.
Por tanto, $63 - x$ es el área para cultivar piña.

$$\begin{aligned} 4 : 3 &= x : (63 - x) \\ 3x &= 4(63 - x) \\ 3x &= 252 - 4x \\ 3x + 4x &= 252 \\ 7x &= 252 \\ x &= 36 \end{aligned}$$

Región del cultivo de piña:

$$\begin{aligned} 63 - x &= 63 - 36 \\ &= 27 \end{aligned}$$

Se usarán 36 manzanas para la caña y 27 para la piña.

2. Sea x el valor de la tarjeta de regalo.

$$\begin{aligned} 9 : 12 &= (x + 900) : 1{,}400 \\ 12(x + 900) &= 9 \times 1{,}400 \\ 12x + 10{,}800 &= 12{,}600 \\ 12x &= 12{,}600 - 10{,}800 \\ 12x &= 1{,}800 \\ x &= 150 \end{aligned}$$

El valor de la tarjeta de regalo es de 150 dólares.

Fecha: **U5 3.8**

Ⓟ Mezclando café y leche a una razón de 5 : 2 se prepararon 840 ml de una bebida. ¿Cuántos mililitros de leche se usaron?

Ⓢ Dos opciones.
Sea x la cantidad de leche en mililitros.

Forma 1

$$\begin{aligned} 5 : 2 &= (840 - x) : x \\ 5x &= 2 \times (840 - x) \\ 5x &= 1\,680 - 2x \\ 7x &= 1\,680 \\ x &= 240 \end{aligned}$$

Razón de la cantidad de leche respecto a la de café.

Forma 2

$$\begin{aligned} 2 : 7 &= x : 840 \\ 2 \times 840 &= 7x \\ 7x &= 1\,680 \\ x &= 240 \end{aligned}$$

Razón de la cantidad de leche respecto al total de la bebida.

Ⓔ a)

$$\begin{aligned} 3 : (2x + 3) &= 6 : 14 \\ 3 \times 14 &= 6 \times (2x + 3) \\ 6(2x + 3) &= 42 \\ 12x &= 24 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 4 : 3 &= 8 : (3x - 3) \\ 4 \times (3x - 3) &= 3 \times 8 \\ 4 \times (3x - 3) &= 24 \\ 12x &= 36 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Ⓡ 1. 36 manzanas para caña y 27 para piña.

Tarea: página 114 del Cuaderno de Ejercicios.

Unidad 6. Proporcionalidad directa e inversa

Competencia de la Unidad

Aplicar los conceptos de proporcionalidad directa e inversa para modelar situaciones del entorno.

Relación y desarrollo

Sexto grado

Unidad 5: Proporcionalidad
- Proporciones
- Proporcionalidad directa
- Proporcionalidad inversa

Séptimo grado

Unidad 5: Ecuaciones de primer grado
- Igualdad de expresiones matemáticas
- Ecuación de primer grado
- Aplicación de ecuaciones de primer grado

Unidad 6: Proporcionalidad directa e inversa
- Proporcionalidad directa
- Proporcionalidad inversa
- Aplicación de la proporcionalidad

Octavo grado

Unidad 2: Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas
- Métodos para resolver ecuaciones de primer grado con dos incógnitas
- Aplicación de las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Unidad 3: Función lineal
- Función lineal
- Función lineal y ecuación de primer grado con dos incógnitas
- Aplicación de la función lineal

Noveno grado

Unidad 3: Ecuación cuadrática
- Ecuación cuadrática
- Aplicaciones de la ecuación cuadrática

Unidad 4: Función cuadrática de la forma $y = ax^2 + c$
- Función $y = ax^2$
- Función $y = ax^2 + c$

Plan de estudio de la Unidad

Lección	Horas	Clases
1. Proporcionalidad directa	1	1. Conceptos de función
	1	2. Concepto de proporcionalidad directa
	1	3. Valores que toman las variables
	1	4. La proporcionalidad directa con valores negativos en las variables
	1	5. La proporcionalidad directa con constante negativa
	1	6. Representación en la forma $y = ax$ a partir de un par de valores para x y y
	1	7. Practica lo aprendido
	2	8. El plano cartesiano
	1	9. Gráfica de la proporcionalidad directa, parte 1
	1	10. Gráfica de la proporcionalidad directa, parte 2
	1	11. Representación $y = ax$ de la proporcionalidad directa a partir de la gráfica
	1	12. Gráfica de proporcionalidad directa cuando las variables toman ciertos valores
	1	13. Practica lo aprendido
2. Proporcionalidad inversa	1	1. Concepto de la proporcionalidad inversa
	1	2. Proporcionalidad inversa con valores negativos en las variables
	1	3. Representación en la forma $y = \frac{a}{x}$ a partir de un par ordenado
	1	4. Gráfica de la proporcionalidad inversa cuya constante es positiva
	1	5. Gráfica de la proporcionalidad inversa cuya constante es negativa

Lección	Horas	Clases
3. Aplicación de la proporcionalidad	1	1. Regla de tres simple directa
	1	2. Regla de tres simple directa con porcentaje
	1	3. Regla de tres simple directa en conversión de unidades
	1	4. Practica lo aprendido
	1	Prueba de la Unidad 6

23 horas clase + prueba de la Unidad 6

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Proporcionalidad directa
Se establece la primera noción del concepto de "función" que será retomado en 8.° para la función lineal y función cuadrática en 9.°. Se hace la ampliación a los números negativos del rango y dominio de las variables que están en una proporcionalidad directa. Se presenta el plano cartesiano por primera vez, comenzando con la ubicación de un par ordenado (punto) en él, para seguir con la representación de una relación de proporcionalidad directa en el plano a través de la ubicación de algunos pares ordenados obtenidos a partir de la relación de proporcionalidad.

Lección 2: Proporcionalidad inversa
En esta lección se hace la ampliación a los números negativos del rango y dominio de las variables que están en una relación de proporcionalidad inversa. Posteriormente, se trabaja con la representación de una relación de proporcionalidad inversa en el plano a través de la ubicación de algunos pares ordenados obtenidos a partir de dicha relación.

Lección 3: Aplicación de la proporcionalidad
Existe una variedad de situaciones del entorno en las que se puede aplicar la proporcionalidad directa o la inversa, según las características de la situación, de modo que será fundamental que el estudiante logre plantear la forma $y = ax$ o $y = \frac{a}{x}$ que describa la relación entre dos variables x y y en una situación determinada.

1.1 Conceptos de función

P

En cada situación donde hay dos variables x y y, identifica en las que se puede encontrar el valor de y cuando x toma un valor determinado.

Para identificarlo, se puede elaborar tablas, sustituyendo el valor de x por un número cualquiera.

a) Cuando la estatura de una persona es x cm, su peso es y kg.
b) Cuando la edad de una persona es x años, su estatura es y cm.
c) Cuando un vehículo recorre una velocidad a 40 km/h durante x horas, la distancia recorrida es y km.
d) Cuando se vierten x litros de agua en una cubeta de 0.75 kg, el peso total es y kg.
e) Cuando un rectángulo tiene 24 cm^2 de área, la base mide x cm y la altura mide y cm.

S

a) No. Aunque x sea 150 cm, no se sabe su peso y kg.
b) No. Aunque x es 13 años, no se sabe su estatura y cm.
c) Sí. $x = 2$ h, $y = 40 \times 2 = 80$, 80 km.

x (h)	1	2	3	4	5	6	7	8
y (km)	40	80	120	160	200	240	280	320

d) Sí. $x = 3\ l$, $y = 3 + 0.75 = 3.75$, 3.75 kg.

x (l)	1	2	3	4	5	6	7	8
y (kg)	1.75	2.75	3.75	4.75	5.75	6.75	7.75	8.75

e) Sí. $x = 4$ cm, $y = 24 \div 4 = 6$, 6 cm.

x (base, cm)	1	2	3	4	5	6	7	8
y (altura, cm)	24	12	8	6	4.8	4	3.428...	3

C

Cuando en dos variables x y y, el valor que toma x determina un único valor de y, se dice que y es **función** de x.

1. Identifica las situaciones en las que la variable y es función de x.
   a) x horas de estudio y el puntaje en el examen es y puntos. No
   b) Cuando un diccionario pesa 2 libras, si hay x cantidad del mismo diccionario, el peso total es y libras. Sí
   c) El recorrido entre dos municipios A y B cuya distancia es 50 km, la distancia recorrida es x km y la distancia faltante es y km. Sí
   d) x años de experiencia en el trabajo y el sueldo es y dólares. No
   e) Cuando se viaja 240 km con una velocidad de x km/h, y el tiempo es y horas. Sí

2. Redacta tres situaciones que involucren las variables x y y, donde y sea función de x.

El peso, cantidad de objetos, tiempo, velocidad, distancia, cantidad de agua en un recipiente, etc., son situaciones comunes para relacionar variables.

a) Un chocolate cuesta 0.5 dólares, x cantidad de chocolates, y precio a pagar
b) Cada caja contiene 3 libros, x cantidad de cajas, y cantidad de libros
c) Una resma de papel tiene 500 hojas, x la cantidad de resmas, y la cantidad de hojas

114

Indicador de logro

1.1 Identifica si una cantidad es función de otra.

Secuencia

Para esta clase se desarrolla la primera noción de función, estableciendo que si se tienen dos cantidades y se define un valor específico para una de ellas se obtiene un único valor para la segunda.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Identificar que una cantidad y es función de otra cantidad x, si un cambio en la cantidad x genera un cambio en y. Para c), d) y e) se puede auxiliar de tablas que ilustren el cambio en ambas variables para determinar si y es función de x.

Ⓒ Enfatizar que una función tiene como característica que para un valor específico de x, y presentará un único valor.

Fecha:

U6 1.1

Ⓟ Determina el valor y cuando x toma un valor.

a) Si la estatura es x cm, su peso es y kg.
b) Si la edad es x años, su estatura es y cm.
c) Con una velocidad de 40 km/h durante x horas, la distancia es y km.
d) Vertiendo x litros de agua en una cubeta de 0.75 kg, el peso total es y kg.
e) Si un rectángulo tiene 24 cm^2 de área, la base mide x cm y la altura mide y cm.

Ⓢ
a) No. Aunque x sea 150 cm, no se sabe su peso y kg.
b) No. Aunque x es 13 años, no se sabe su estatura y cm.
c) Sí. $x = 2$ h, $y = 40 \times 2 = 80$, 80 km.
d) Sí. $x = 3$ l, $y = 3 + 0.75 = 3.75$, 3.75 kg.
e) Sí. $x = 4$ cm, $y = 24 \div 4 = 6$, 6 cm.

Ⓡ 1.

a) No b) Sí

c) Sí d) No

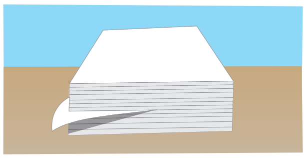
e) Sí

Tarea: página 118 del Cuaderno de Ejercicios.

1.2 Concepto de proporcionalidad directa

P

Una resma de papel bond pesa 2 libras. Representa el peso y libras de x resmas de papel bond.



x (resmas)	1	2	3	4	5	6	...
y (libras)	2	4	6	8	10	12	...

a) Cuando el valor de x es multiplicado por 2, 3, 4,... ¿cómo cambia el valor de y?

b) ¿Cuál es el valor de $\frac{y}{x}$? ¿Es constante?

c) Representa y en términos de x.

Representar y en término de x es escribir $y = ax$, usando la variable x.

S

a) Tal como se muestra en la tabla, cuando el valor de x cambia multiplicado por 2, 3, 4..., el valor de y correspondiente, también va cambiando al ser multiplicado por 2, 3, 4...

b) Tal como se muestra en la tabla, siempre resulta 2 y es constante.

c) Con el resultado de b), se sabe que el valor de y es x por 2, es decir $\frac{y}{x} = 2 \Longrightarrow y = 2x$.

× 2 × 3 × 4

x (resmas)	1	2	3	4	5	6	...
y (libras)	2	4	6	8	10	12	...

× 2 × 3 × 4

C

En el Problema inicial, x y y se llaman **variables**, mientras la cantidad que no varía se llama **constante**, tal como es 2 en $y = 2x$. Cuando y es función de x y se expresa de la forma de $y = ax$, (a es constante) se dice que y es **directamente proporcional** a x. Al número a se le llama **constante de proporcionalidad**.

constante

$y = ax$

variables

Determina si y es directamente proporcional a x, expresando $y = ax$ e indica la constante de proporcionalidad.

a) Cuando un atleta camina por la playa 80 metros por minuto, el tiempo es x minutos y la distancia recorrida es y metros.

Sí. $y = 80x$

x (minutos)	1	2	3
y (metros)	80	160	240

b) Cuando una carnicería vende carne molida a \$2.50 por libra, el peso es x libras y el precio es y dólares.

Sí. $y = 2.5x$

x (libras)	1	2	3
y (dólares)	2.50	5	7.50

c) Cuando se vierte agua a un ritmo de $\frac{3}{4}$ galones por minuto, el tiempo es x minutos y la cantidad de agua es y galones.

Sí. $y = \frac{3}{4}x$

x (minutos)	1	2	3
y (galones)	$\frac{3}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{9}{4}$

El concepto de proporciones ha estado históricamente relacionado con la arquitectura, el arte, la belleza y la música, y surgen proporciones específicas como parámetro de belleza y arte como el caso del número de oro (proporción aúrea o ϕ), además del trabajo del matemático griego Pitágoras con las proporciones 1:1, 1:2, 1:3 y 1:4 como regidoras del Universo, y que se han utilizado para la obtención de la escala musical y la marcación de los intervalos (diferencia entre agudos y graves) a partir del monocordio en el ámbito de la música.

Carrión, V., Llopis, L. y Queralt, T. *Música y matemática, La armonía de los números.*

Unidad 6

Indicador de logro

1.2 Identifica si la relación de dos cantidades es de proporcionalidad directa expresándola en la forma $y = ax$ e indicando la constante.

Secuencia

En primero y segundo ciclo de educación básica los estudiantes aprendieron a identificar una relación de proporcionalidad directa entre dos cantidades x y y y la forma de representar la relación, es decir con:

$$y = \text{constante} \times x$$

A partir de esta clase se retoma este tema, con la diferencia de que para la representación de una relación de proporcionalidad directa se omite la escritura de "×" en su representación, es decir, la escritura se hace como $y = ax$
De modo que también se establece que a se llama constante de proporcionalidad.
También se hace explícito el hecho de que una relación de proporcionalidad directa entre y y x denotada por: $y = ax$, indica que y es función de x.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Identificar que al multiplicar x por 2, 3 ... también y es multiplicado por 2, 3 ... obteniendo que el valor de $\frac{x}{y}$ es constante y así poder determinar la forma $y = ax$ que representa la relación de las dos variables. Para el desarrollo del Ⓟ de la clase los estudiantes pueden auxiliarse de lo aprendido en sexto grado a cerca de la relación de dos cantidades directamente proporcionales.

Ⓒ Señalar que cuando y es función de x, y se expresa por $y = ax$, se dice que y es directamente proporcional a x.

Solución de algunos ítems:

a) Si $a = \frac{y}{x} = \frac{80}{1} = 80$
$y = 80x$

b) Si $a = \frac{y}{x} = \frac{2.5}{1} = 2.5$
$y = 2.5x$

Fecha:

U6 1.2

Ⓟ Observa la tabla y realiza los literales.

x (resmas)	1	2	3	4	5	6	...
y (libras)	2	4	6	8	10	12	...

a) Teniendo en cuenta que 1 resma pesa 2 lb, si el valor de x se multiplica por 2, 3... ¿cómo cambia el valor de y correspondiente?
b) ¿Cuál es el valor de $\frac{y}{x}$? ¿Es constante?
c) Representa y en términos de x.

Ⓢ

× 2 × 3 × 4

x (resmas)	1	2	3	4	5	6	...
y (libras)	2	4	6	8	10	12	...

× 2 × 3 × 4

a) Si el valor de x se multiplica por 2, 3, 4..., el valor de y correspondiente, se multiplica por 2, 3, 4...
b) Siempre resulta 2 y es constante.
c) Por b) se sabe que $y = 2x$.

Ⓡ a) 160, 240

b) 5, 7.50

c) $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{9}{4}$

Tarea: página 119 del Cuaderno de Ejercicios.

1.3 Valores que toman las variables

P

Piensa en los valores que pueden tomar las variables de la siguiente situación:

Para llenar una piscina rectangular a una altura (profundidad) de 120 cm, se vierte agua a un ritmo de 6 cm de altura (profundidad) por hora.

a) ¿Cuántas horas se necesitan para llenar 120 cm de altura?

b) Si el tiempo transcurrido del llenado de agua se expresa con x, ¿desde qué y hasta qué valor puede tomar la variable x?

c) Dado que la variable y representa la altura (profundidad) de agua, ¿desde qué y hasta qué valor tomaría la variable y?

x (horas)	0	1	2	3	4	...
y (cm)	0	6	12	18	24	...

S

a) Como cada hora se llena 6 cm; 120 ÷ 6 = 20, entonces, se necesitan 20 horas.

b) Desde 0 hasta 20 horas y esto se representa como $0 \leq x \leq 20$ y se lee "x es mayor o igual que 0 y menor o igual que 20".

c) Desde 0 hasta 120 esto se escribe $0 \leq y \leq 120$ y se lee "y es mayor o igual que 0 y menor o igual que 120".

x (horas)	0	1	2	3	4	...	20
y (cm)	0	6	12	18	24	...	120

C

En la proporcionalidad directa hay casos en que se limita el valor que pueden tomar las variables x y y, para representar ese límite se usan los signos de desigualdad (<, >, ≤, ≥).

Los valores que puede tomar la variable x se llama **dominio** y los de y se llama **rango**. Estos término se retomarán en grados posteriores.

En las siguientes situaciones, representa desde qué y hasta qué valor se pueden tomar las variables x y y usando los signos de desigualdad.

a) Una carnicería que tiene 20 libras de carne molida y el precio es $2 por libra, el peso vendido es x libras y la venta es y dólares.

x (libras)	0	1	2	3	4	...	20
y (dólares)	0	2	4	6	8	...	40

b) En una pila cuya capacidad máxima es de 20 galones se vierte agua a un ritmo de 0.5 galones por minuto, el tiempo es x minutos y la cantidad de agua en la pila es y galones.

x (minutos)	0	1	2	3	4	...	40
y (galones)	0	0.5	1.0	1.5	2.0	...	20

c) Cuando en una alcancía caben 200 monedas de $0.25 como máximo, la cantidad de monedas de $0.25 es x monedas y el monto de monedas es y dólares.

x (monedas)	0	1	2	3	4	...	200
y (dólares)	0	0.25	0.50	0.75	1.00	...	50

Indicador de logro

1.3 Representa los valores que toman las variables que están en una relación de proporcionalidad directa a través de desigualdades.

Secuencia

En esta clase se definen intuitivamente los conceptos de dominio y rango de funciones a través de situaciones de proporcionalidad directa en las cuales los valores que toman las variables son limitados. Aquí se establece que para expresar los valores que toman las variables se debe hacer uso de los signos de desigualdad. El hecho de llamar al conjunto de valores como dominio y rango debe hacerse solo como un comentario, sin entrar en mayores detalles para no generar dificultades al estudiante.

Propósito

Ⓟ Hacer uso de los símbolos para representar las desigualdades(<, >, ≤ y ≥) que ya se han trabajado previamente.

Ⓢ Hacer énfasis en la lectura de las desigualdades; por ejemplo, $0 \leq x \leq 20$, se lee "x es mayor o igual que 0 y menor o igual que 20".

Solución de algunos ítems:

a) Se vende desde 0 a un máximo de 20 libras:

$$0 \leq x \leq 20$$

Cada libra cuesta 2 dólares, por lo que el máximo es $20 \times 2 = 40$

$$0 \leq y \leq 40$$

b) La pila tiene la capacidad de 20 galones, por lo que el tiempo máximo será $20 \div 0.5 = 40$

$$0 \leq x \leq 40$$

La capacidad puede ser como máximo 20 galones.

$$0 \leq y \leq 20$$

c) La cantidad máxima de monedas que puede contener es 200

$$0 \leq x \leq 200$$

Cada moneda tiene el valor de 0.25, por lo que el máximo a contener es $200 \times 0.25 = 50$

$$0 \leq y \leq 50$$

Fecha: **U6 1.3**

Ⓟ Para llenar una piscina rectangular a una altura (profundidad) de 120 cm, se vierte agua a un ritmo de 6 cm de altura (profundidad) por hora.

a) ¿Cuántas horas se necesitan para llenar 120 cm de altura?

b) El tiempo transcurrido en el llenado de agua es x, ¿desde qué y hasta qué valor puede tomar x?

c) La variable y representa la altura (profundidad) de agua, ¿desde qué y hasta qué valor tomaría y?

x (horas)	0	1	2	3	4	...
y (cm)	0	6	12	18	24	...

Ⓢ a) Como cada hora se llena 6 cm; $120 \div 6 = 20$, entonces, se necesitan 20 horas.

b) Desde 0 hasta 20 horas y esto se representa como $0 \leq x \leq 20$.

c) Desde 0 hasta 120 esto se escribe $0 \leq y \leq 120$.

Ⓡ a) $0 \leq x \leq 20$
$0 \leq y \leq 40$

b) $0 \leq x \leq 40$
$0 \leq y \leq 20$

c) $0 \leq x \leq 200$
$0 \leq y \leq 50$

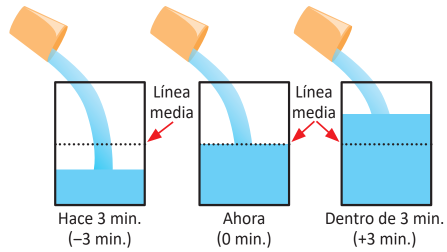
Tarea: página 120 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 1

1.4 La proporcionalidad directa con valores negativos en las variables

P

Tal como se muestra en el dibujo, se vierte agua a un ritmo de 2 cm de altura (profundidad) por minuto. Dado que el tiempo de este momento es 0 minutos, y la línea media del recipiente es 0 cm de altura, encuentra la relación entre x minutos después y la altura y cm arriba de la línea media, y realiza lo siguiente:



a) Completa la tabla:

x (minutos)	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y (cm)				–2	0	2			

Cuando x es –4, significa 4 minutos antes, si y es negativo significa que está debajo de la línea media del recipiente.

b) ¿Puede representarse la altura y cm de la forma $y = ax$?

c) ¿Se puede decir que y es directamente proporcional a x?

S

a)

x (minutos)	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y (cm)	–8	–6	–4	–2	0	2	4	6	8

b) Como la constante es 2, entonces, $y = 2x$.

c) Sí, porque se pudo representar de la forma de $y = ax$, además, cumple que cuando el valor de x cambia al ser multiplicado por 2, 3, 4..., el valor de y correspondiente también cambia multiplicándose por 2, 3, 4... Por ejemplo, el valor de x cambia de –1 a –3 (–1 multiplicado por 3), el valor de y también cambia de –2 a –6 (–2 multiplicado por 3).

C

Aunque las variables tomen valores negativos, las características de proporcionalidad siempre se cumplen, es decir, en la proporcionalidad directa, las variables pueden tomar valores negativos.

1. Siguiendo la misma situación del Problema inicial, con la diferencia que se vierten 4 cm de altura por minuto, realiza lo siguiente:

a) Completa la tabla:

x (minutos)	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y (cm)	–16	–12	–8	–4	0	4	8	12	16

b) Escribe en forma de $y = ax$, la relación entre las variables x y y. $y = 4x$

c) Determina si y es directamente proporcional a x. Es directamente proporcional

2. Completa las tablas de tal manera que los datos tengan una relación de proporcionalidad directa y escríbela en la forma de $y = ax$.

a)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–12	–9	–6	–3	0	3	6	9	12

$y = 3x$

b)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–10	–7.5	–5	–2.5	0	2.5	5	7.5	10

$y = 2.5x$

Unidad 6

Indicador de logro

1.4 Representa en la forma $y = ax$, dos variables que toman valores negativos y que están en una relación de proporcionalidad directa con constante positiva, a partir de una tabla.

Secuencia

En primero y segundo ciclo de educación básica los estudiantes identificaron y representaron relaciones de proporcionalidad directa entre dos variables x y y cuando los valores que tomaban ambas variables eran positivos. Dado que los estudiantes en la Unidad 1 aprendieron a operar con los números negativos, en esta clase se analizan relaciones de proporcionalidad directa cuando los valores que toman las variables pueden ser negativos.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Determinar que la relación de proporcionalidad directa entre dos variables se mantiene aunque estas tomen valores negativos. Para desarrollar el Ⓟ de la clase los estudiantes pueden tener dos dificultades. La primera puede ser el hecho de que se establece que la línea media del recipiente es 0 cm de altura y en la ilustración se observa que la línea obviamente no se encuentra en la base del recipiente, y la segunda puede generarse al no ser claro a qué altura se refiere y. Para la primera dificultad hay que aclarar que definir "este momento" como el minuto 0 y la "línea media" como 0 son condiciones que se establecen convenientemente en la situación para ilustrar los casos en que las variables pueden tomar valores negativos. Para la segunda dificultad se debe repetir a los estudiantes que y representa la altura del agua respecto a la línea media, es decir, tomando a la línea media como punto de referencia.

Solución de algunos ítems:

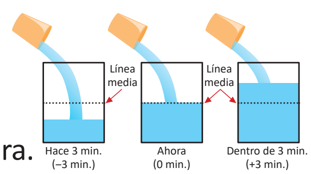
b) $a = \frac{y}{x} = \frac{4}{1} = 4$

$y = 4x$

c) Se pudo representar en la forma:
$y = ax$, por lo que es directamente proporcional.

Fecha: **U6 1.4**

Ⓟ Se decide que



- El tiempo de este momento es 0 minutos.
- La línea media del recipiente es 0 cm de altura.
- x representa los minutos después de este momento.
- y representa los cm arriba de la línea media.

Realiza lo siguiente:

a) Completa la tabla (vertiendo el agua a 2 cm por minuto).

b) ¿Puede representarse la altura y cm de la forma $y = ax$?

c) ¿Es y directamente proporcional a x?

Ⓢ a)

x (minutos)	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y (cm)	−8	−6	−4	−2	0	2	4	6	8

b) Como la constante es 2, entonces, $y = 2x$

c) Sí, porque se puede representar de la forma $y = ax$.

Ⓡ

1.

a) −16, −12, −8, −4, 8, 12, 16

b) $y = 4x$

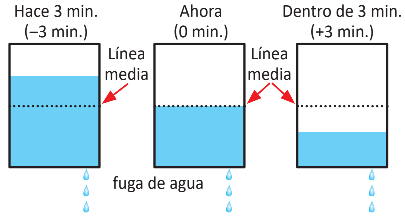
c) Es directamente proporcional.

Tarea: página 121 del Cuaderno de Ejercicios.

1.5 La proporcionalidad directa con constante negativa

P

Tal como se muestra en el dibujo, hay fuga de agua a un ritmo de 2 cm de altura por minuto. Dado que el tiempo de este momento es 0 minutos y la línea media del recipiente es 0 cm de altura, determina la relación entre x minutos después y la altura y cm, con respecto a la línea media. Además:



a) Completa la tabla:

x (minutos)	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y (cm)			4	2	0	−2	−4		

b) Escribe la relación entre las variables de la forma de $y = ax$.

c) Determina si y es directamente proporcional a x.

Cuando x toma el valor −4, significa 4 minutos antes, si y toma un valor negativo significa que está debajo de la línea media del recipiente. Recuerda que puedes encontrar la constante calculando $\frac{y}{x}$, ¿puede ser negativa?

S

a)

x (minutos)	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y (cm)	8	6	4	2	0	−2	−4	−6	−8

× (−2)

b) Como la constante es −2, entonces, $y = -2x$.

c) Como se pudo representar la relación en la forma $y = ax$, se concluye que y es directamente proporcional a x, además, cumple que si el valor de x cambia al ser multiplicado por 2, 3, 4..., el valor de y correspondiente también cambia siendo multiplicado por 2, 3, 4... Por ejemplo, el valor de x cambia de 1 a 3 (1 multiplicado por 3), el valor de y también cambia de −2 a −6 (−2 multiplicado por 3).

C

En la proporcionalidad directa, hay casos en que su constante es negativa. Es decir, en el valor de $y = ax$, a puede tomar valor negativo ($a < 0$).

Es por eso que en la proporcionalidad directa no se dice que si una cantidad aumenta la otra también aumenta, sino que se dice que **cambia**. Ya que, en este caso, una cantidad aumenta y la otra disminuye; sin embargo, siempre tienen una relación de proporcionalidad directa.

1. Siguiendo la misma situación del Problema inicial, con la diferencia que se pierden 4 cm de altura por minuto, realiza lo siguiente:

a) Completa la tabla:

x (minutos)	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y (cm)	16	12	8	4	0	−4	−8	−12	−16

b) Escribe en forma de $y = ax$, la relación entre las variables. $y = -4x$

c) Escribe si y es directamente proporcional a x. Sí es directamente proporcional

2. Completa las tablas de tal manera que los datos tengan una relación de proporcionalidad directa y escríbela en la forma de $y = ax$.

a)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	12	9	6 3		0	−3	−6	−9	−12

$y = -3x$

b)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	6	4.5	3	1.5	0	−1.5	−3	−4.5	−6

$y = -1.5x$

Indicador de logro

1.5 Representa en la forma $y = ax$, dos variables que están en una relación de proporcionalidad directa con constante negativa, a partir de una tabla.

Secuencia

Las relaciones de proporcionalidad directa trabajadas en primero y segundo ciclo de educación básica tenían constantes positivas; de nuevo, por la ampliación que se ha tenido en la Unidad 1 con el uso de los números negativos, se abordan las relaciones de proporcionalidad directa cuando la constante de proporcionalidad es negativa.

Propósito

Ⓟ Determinar que la relación de proporcionalidad directa entre dos variables puede tener una constante negativa. El Ⓟ de esta clase comparte las consideraciones explicadas en el Ⓟ de la página anterior de esta guía.

Ⓢ Hacer énfasis en que no es correcto decir que en una relación de proporcionalidad, si una cantidad aumenta la otra también; ya que como puede verse en el ejemplo a medida que aumenta el tiempo, la altura del agua respecto al nivel medio disminuye. Es mejor decir que en dos variables directamente proporcionales si una cantidad cambia la otra también.

Solución de algunos ítems:

1. a) $-4 \times (-4) = 16$
$-3 \times (-4) = 12$
$-2 \times (-4) = 8$
$-1 \times (-4) = 4$
$2 \times (-4) = -8$
$3 \times (-4) = -12$
$4 \times (-4) = -16$

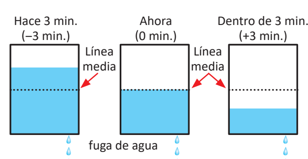
b) $a = \frac{y}{x} = \frac{-4}{1} = -4$
$y = -4x$

c) Se pudo representar en la forma: $y = ax$, por lo que es directamente proporcional.

Fecha:

U6 1.5

Ⓟ El tiempo de este momento es 0 minutos y la línea media del recipiente es 0 cm de altura. Determina la relación entre x minutos después y la altura y cm, con respecto a la línea media. Además:



a) Completa la tabla (saliendo el agua a 2 cm por minuto).
b) Escribe la relación entre las variables de la forma de $y = ax$.
c) ¿y es directamente proporcional a x?

Ⓢ

x (minutos)	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y (cm)	8	6	4	2	0	−2	−4	−6	−8

b) Como la constante es −2, entonces, $y = -2x$.
c) Sí, porque se puede representar de la forma $y = ax$.

Ⓡ

1.
a) 16, 12, 8, 4, −8, −12, −16

b) $y = -4x$

c) Es directamente proporcional.

Tarea: página 122 del Cuaderno de Ejercicios.

1.6 Representación en la forma $y = ax$ a partir de un par de valores para x y y

P

Si y es directamente proporcional a x y además $x = 4$, $y = 12$, representa en forma de $y = ax$ la relación entre las variables.

Como ya se conocen los valores de x y y, solamente se necesita encontrar el valor de a.

S

Se sustituyen los valores de x y y, luego se encuentra el valor de a.

Se tiene que $x = 4$, $y = 12$, se sustituyen en $y = ax$.

$$12 = 4a$$
$$4a = 12$$
$$a = 3$$

Entonces, $y = 3x$.

C

Para representar la relación de la proporcionalidad directa en la forma de $y = ax$, a partir de un par de valores de variables, se realizan los siguientes pasos:

1. Se sustituyen los valores en las variables y se forma una ecuación.

2. Se encuentra el valor de la constante en la ecuación.

3. Se sustituye el valor de la constante en $y = ax$.

1. Si y es directamente proporcional a x, encuentra el valor de la constante a en $y = ax$, para cada uno de los siguientes casos:

a) $x = 2$, $y = 14$
$a = 7$

b) $x = 2$, $y = 5$
$a = 2.5$

c) $x = 3$, $y = 12$
$a = 4$

d) $x = -3$, $y = -9$
$a = 3$

e) $x = 2$, $y = -20$
$a = -10$

f) $x = 6$, $y = -9$
$a = -1.5$

2. Redacta para cada literal una situación de proporcionalidad directa que se represente con la siguiente expresión:

a) $y = 5x$

Cada bolsa trae 5 dulces, x es la cantidad de bolsas, y la cantidad de dulces

b) $y = \frac{2}{3}x$

Un corredor recorre $\frac{2}{3}$ de una pista cada minuto, x son los minutos, y son las vueltas que ha dado en la pista

c) $y = -2x$

Una cisterna pierde 2 litros de agua cada hora, x es la cantidad de horas, y la cantidad de litros de agua en la cisterna

Indicador de logro

1.6 Representa en la forma $y = ax$ dos variables que están en una relación de proporcionalidad directa, a partir de un par de valores de y y x.

Secuencia

En esta clase se determina la ecuación que representa a una relación de proporcionalidad directa entre dos variables x y y, a partir de un par de valores para las variables.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Determinar la forma $y = ax$ a través de la aplicación de ecuaciones de primer grado, en la que la incógnita sea la constante de proporcionalidad a. Se debe tener en cuenta que para formular la ecuación, los estudiantes previamente tienen que hacer una sustitución de valores en las variables x y y en la forma $y = ax$, que se trabajó en la clase 1.14 de la Unidad 4.

Solución de algunos ítems:

1.

a)
$$y = ax$$
$$14 = 2a$$
$$14 \div 2 = a$$
$$7 = a$$

b)
$$y = ax$$
$$5 = 2a$$
$$5 \div 2 = a$$
$$\frac{5}{2} = a$$
$$2.5 = a$$

c)
$$y = ax$$
$$12 = 3a$$
$$12 \div 3 = a$$
$$4 = a$$

d)
$$y = ax$$
$$-9 = -3a$$
$$-9 \div (-3) = a$$
$$3 = a$$

e)
$$y = ax$$
$$-20 = 2a$$
$$-20 \div 2 = a$$
$$-10 = a$$

f)
$$y = ax$$
$$-9 = 6a$$
$$-9 \div 6 = a$$
$$-\frac{3}{2} = a$$
$$-1.5 = a$$

Fecha:

U6 1.6

Ⓟ Si y es directamente proporcional a x y además $x = 4$, $y = 12$. Representa en forma de $y = ax$ la relación entre las variables.

Ⓢ Se sustituyen los valores de x y y, luego se encuentra el valor de a.

Se tiene que $x = 4$, $y = 12$, se sustituyen en $y = ax$
$$12 = 4a$$
$$4a = 12$$
$$a = 3$$
Entonces, $y = 3x$.

Ⓡ

1.

a) $a = 7$ b) $a = \frac{5}{2}$

c) $a = 4$ d) $a = 3$

e) $a = -10$ f) $a = -\frac{3}{2}$

Tarea: página 123 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 1

1.7 Practica lo aprendido

1. Identifica las situaciones en las que la variable y es función de x.
   a) La edad de una persona es x años y el peso de la misma persona es y libras. No es función
   b) El número de años que tiene un árbol de mango es x años y la cantidad de la cosecha de mango es y quintales. No es función
   c) Para una persona que camina 40 metros por minuto, el tiempo es x minutos y la distancia recorrida es y metros. Es función
   d) Cuando un metro de varilla de hierro pesa 0.5 libras, la longitud es x metros y el peso y libras. Es función
   e) Cuando en la alcancía hay $50.00, el dinero gastado es x dólares y el restante es y dólares. Es función
   f) Un prisma rectangular cuya área de su base es de 6 cm^2, la altura es x cm y el volumen es y cm^3.
   Es función

2. En cada tabla y es directamente proporcional a x. Realiza lo siguiente:
   a) Completa la tabla. b) Encuentra la constante. c) Representa la relación entre las variables como $y = ax$.

x	0	1	2	3	4	...	8
y	0	4	8	12	16	...	32

b) $a = 4$
c) $y = 4x$

x	0	1	2	3	4	...	8
y	0	4	8	12	16	...	32

b) $a = 4$
c) $y = 4x$

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y	10	8	6	4	2	0	–2	–4	–6	–8	–10

b) $a = -2$
c) $y = -2x$

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y	–25	–20	–15	–10	–5	0	5	10	15	20	25

b) $a = 5$
c) $y = 5x$

x	0	1	2	3	4	...	8
y	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{12}{4}$	...	$\frac{24}{4}$

b) $a = \frac{3}{4}$
c) $y = \frac{3}{4}x$

3. En la siguiente situación, escribe los valores que toman las variables x y y:
   En una pila cuya capacidad máxima es de 30 galones, se vierte a un ritmo de 2 galones por minuto, el tiempo es x minutos y la cantidad de agua en la pila es y galones.
   $30 \div 2 = 15$, $0 \leq x \leq 15$, $0 \leq y \leq 30$

4. Si y es directamente proporcional a x, representa en la forma de $y = ax$, la información de cada literal.
   a) Cuando $x = 4$, $y = 12$
   $y = 3x$
   b) Cuando $x = 4$, $y = -16$
   $y = -4x$
   c) Cuando $x = -2$, $y = 12$
   $y = -6x$
   d) Cuando $x = -12$, $y = -24$
   $y = 2x$

5. Determina si son verdaderas o falsas las siguientes oraciones sobre proporcionalidad directa. En caso que sea falso, corrígela para que sea verdadero.
   a) Cuando y es directamente proporcional a x, si la variable x aumenta, la otra variable y siempre aumenta. Falso
   b) Cuando una función se representa por $y = -3x$, y no es directamente proporcional a x ya que la constante no puede ser negativa. Falso
   c) Si y es directamente proporcional a x, y su relación se representa por $y = 3x$, entonces, cuando $x = 7$, $y = 10$. Falso

Indicador de logro

1.7 Efectúa una suma de números decimales o fraccionarios que son positivos o negativos.

Solución de algunos ítems:

3.

$30 \div 2 = 15$, $0 \leq x \leq 15$, $0 \leq y \leq 30$

4.

a)
$$\begin{aligned} y &= ax \\ 12 &= 4a \\ 12 \div 4 &= a \\ 3 &= a \end{aligned}$$
$y = 3x$

b)
$$\begin{aligned} y &= ax \\ -16 &= 4a \\ -16 \div 4 &= a \\ -4 &= a \end{aligned}$$
$y = -4x$

c)
$$\begin{aligned} y &= ax \\ 12 &= -2a \\ 12 \div (-2) &= a \\ -6 &= a \end{aligned}$$
$y = -6x$

d)
$$\begin{aligned} y &= ax \\ -24 &= -12a \\ -24 \div (-12) &= a \\ 2 &= a \end{aligned}$$
$y = 2x$

5.

a) Es falso pues la proporción directa se da cuando una variable cambia multiplicándose ×2, ×3, etc., la otra también cambia multiplicándose ×2, ×3, etc.

b) Es falso debido a que en la expresión $y = ax$, a puede ser negativo.

c) Es falso pues en esta relación si $x = 7$ se tiene:
$$\begin{aligned} y &= 3x \\ y &= 3 \times 7 \\ y &= 21 \end{aligned}$$

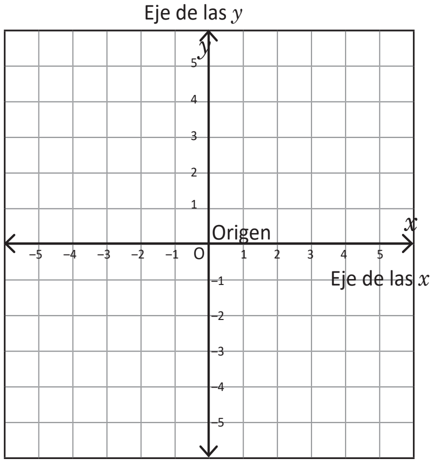
Tarea: página 124 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 1

1.8 El plano cartesiano

P

Al trazar dos rectas numéricas que se intersectan perpendicularmente en el punto O, y llamar a la recta horizontal **eje de las x** (o abscisas), a la recta vertical **eje de las y** (o de las ordenadas), y al punto de intersección de ambas rectas **origen**, representado por la letra O correspondiente al valor 0 en x y en y, se obtiene el siguiente plano:

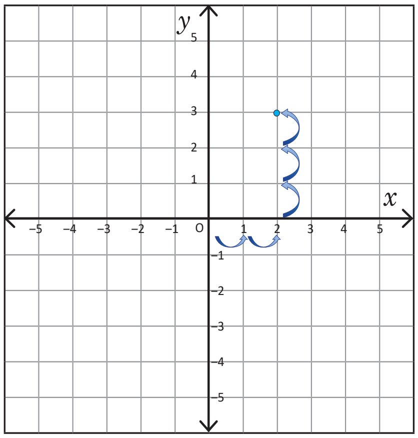


A este plano se le llama plano cartesiano.

¿Cómo se puede representar en el plano cartesiano el punto A, cuya posición está representada por $x = 2$ y $y = 3$?

S

Para ubicar el punto A, $x = 2$ y $y = 3$, partiendo del punto de origen O, primero se desplaza 2 posiciones hacia la derecha para ubicar el valor $x = 2$, y luego 3 posiciones hacia arriba para ubicar $y = 3$.



C

Este par de números del punto A, se escriben como A(2, 3) y se llama **par ordenado** del punto A. El punto de origen O siempre representa (0, 0).

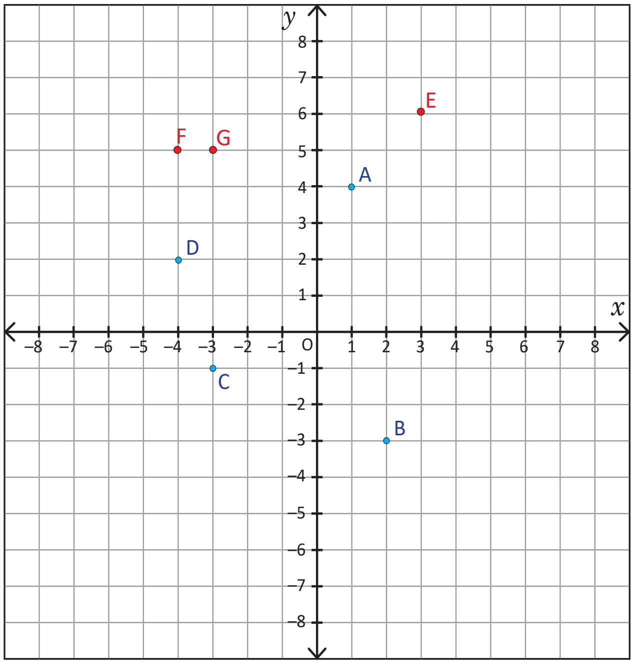
En general, los valores que representan a un punto P en el plano cartesiano, se llaman **coordenadas** del punto P. En el problema anterior las coordenadas del punto A son $x = 2$ y $y = 3$.

Para representar un punto en el plano cartesiano, se debe realizar el procedimiento presentado.

Unidad 6

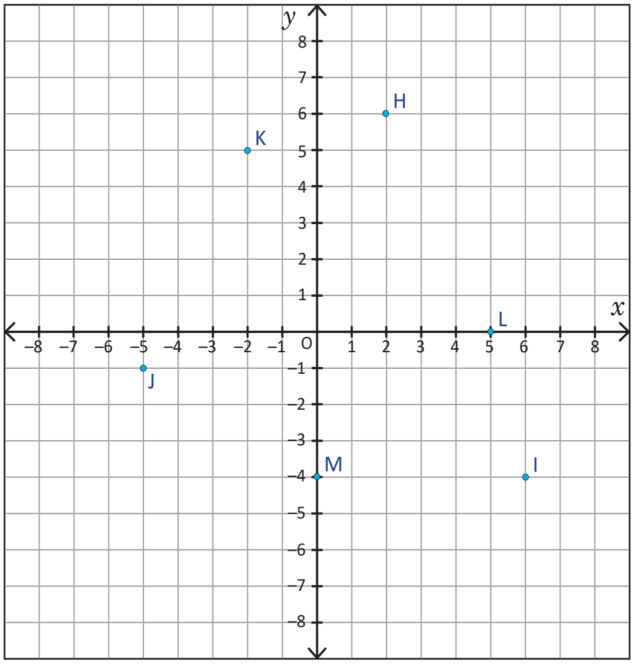
121

1. En el plano cartesiano, lee y escribe los puntos A, B, C y D, y ubica los puntos E(3, 6), F(−4, 5) y G(−3, 5). Ejemplo: A(1, 4).



B(2, −3)
C(−3, −1)
D(−4, 2)

2. Escribe las coordenadas de los siguientes puntos: H, I, J, K, L y M.



H(2, 6)
I (6, −4)
J (−5, −1)
K(−2, 5)
L(5, 0)
M(0, −4)

3. En el plano cartesiano, ubica los siguientes puntos:

a) N(3, 4) b) P(3, −4) c) Q(−4, −5)

d) R(−2, 2) e) S(2, 0) f) T(0, 4)

Indicador de logro

1.8 Lee y ubica un par ordenado en el plano cartesiano.

Secuencia

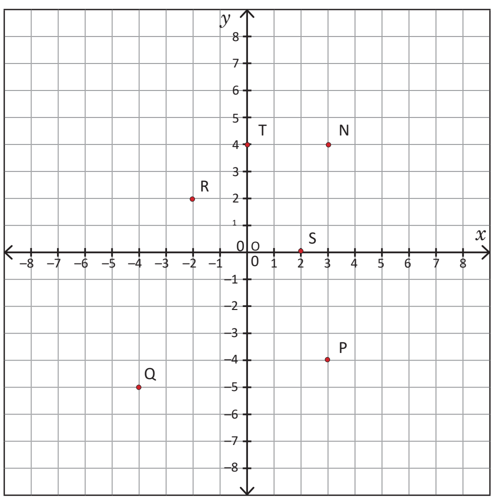
En esta clase los estudiantes conocerán el plano cartesiano, sus características y la forma de representar un punto en él. De modo que se introducen los términos de “eje de las x o abscisas”, “eje de las y u ordenadas”, “origen”, “par ordenado” y “coordenadas de un punto”.

Propósito

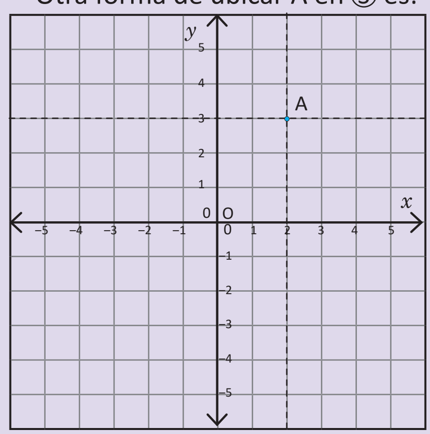
Ⓟ Determinar la forma de ubicar un punto en el plano cartesiano. Una de las consideraciones que se debe tener en el Ⓟ es el hecho de que se hace la presentación de qué es el plano cartesiano, por lo que es necesario hacer una breve descripción refiriéndose al plano en la pizarra; el estudiante deberá encontrar una forma de ubicar un punto en él a partir de la información proporcionada. La explicación del plano cartesiano por parte del docente debe ser mínima para que el estudiante analice la información presentada como parte de su trabajo activo.

Solución de algunos ítems:

3.



Otra forma de ubicar A en Ⓢ es:



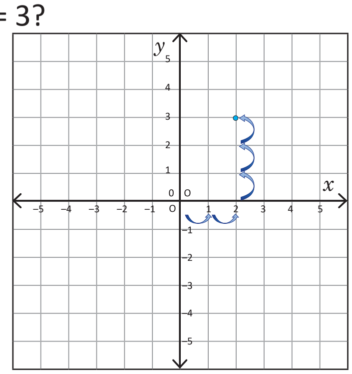
El punto A es el punto de intersección de la recta vertical y la horizontal.

Fecha: **U6 1.8**

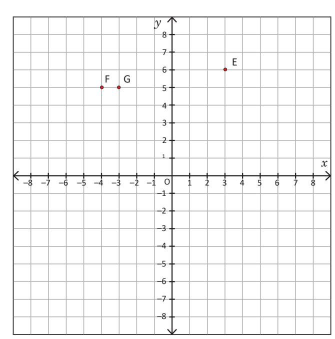
Ⓟ Considerando al **eje de las x** como una recta numérica horizontal, al **eje de las y** como una recta numérica vertical, y el punto de intersección de ambas rectas como el **origen** (O) correspondiente al valor 0 en x y en y.

¿Cómo se puede representar en el plano cartesiano el punto A cuya posición está representada por $x = 2$ y $y = 3$?

Ⓢ Para ubicar el punto A, $x = 2$ y $y = 3$, partiendo del punto de origen O, primero se desplaza 2 posiciones hacia la derecha para ubicar el valor $x = 2$, y luego 3 posiciones hacia arriba para ubicar $y = 3$.



Ⓡ 1.



Tarea: página 125 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 1

1.9 Gráfica de la proporcionalidad directa, parte 1

P

En sexto grado aprendiste a graficar la proporcionalidad directa cuando el valor de x es mayor o igual que cero ($x \geq 0$). Ahora piensa cómo se grafica cuando x toma valores negativos.

En la siguiente tabla se muestran pares ordenados de x y y, que están en proporcionalidad directa: $y = 2x$.

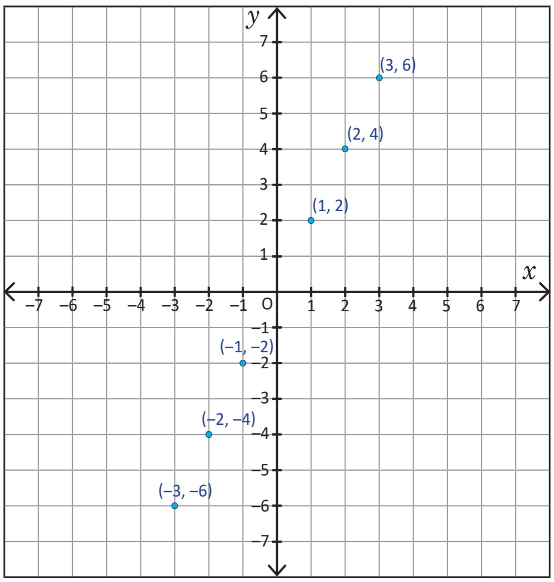
x	...	−3	−2	−1	0	1	2	3	...
y	...	−6	−4	−2	0	2	4	6	...

a) Ubica los pares ordenados de la tabla anterior en el plano cartesiano.
b) Ubica los siguientes pares ordenados en otro plano cartesiano.

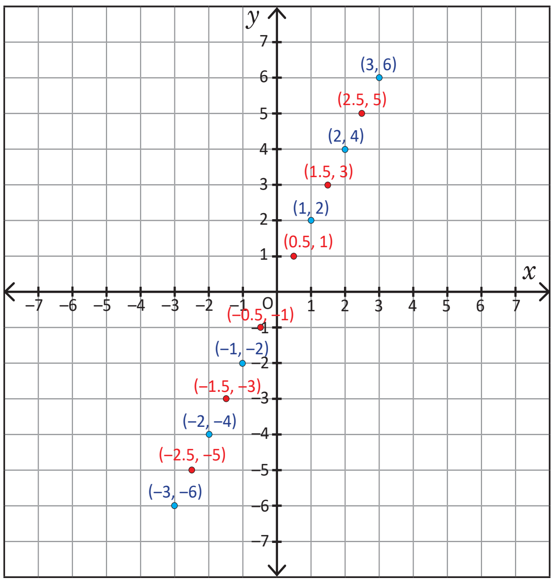
x	...	−3	−2.5	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	...
y	...	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	...

S

a)



b)



C

Tal como se muestra en la Solución, al colocar los pares ordenados que corresponden a $y = 2x$, estos puntos se ubican en una línea recta y al colocar más puntos, se forma una línea recta. A esta recta se le llama gráfica de $y = 2x$.

Elabora la gráfica de $y = 3x$, a partir de la siguiente tabla:

x	...	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	...
y	...	−12	−9	−6	−3	0	3	6	9	12	...

Unidad 6

Indicador de logro

1.9 Grafica una relación de proporcionalidad directa a partir de tablas.

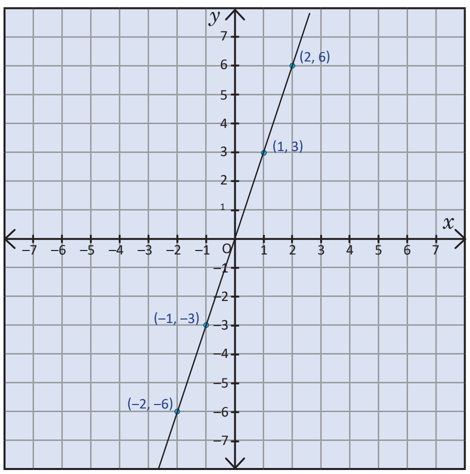
Secuencia

En la clase anterior se aprendió a ubicar un punto en el plano cartesiano, partiendo de ese hecho, en una tabla de valores para dos variables directamente proporcionales x y y cuya constante de proporcionalidad es positiva se forman pares ordenados que tienen que graficarse en el plano; de modo que los estudiantes obtengan la gráfica de proporcionalidad directa y observen que es una línea recta. La comprensión de este contenido es importante porque establece la base para el desarrollo de la función lineal en 8°.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Determinar que cuando se representan en el plano cartesiano los pares ordenados de dos variables que están en una relación de proporcionalidad directa, se obtiene una línea recta y a medida que se agregan más puntos estos siguen formando parte de la línea recta. Al principio del Ⓟ se hace referencia a un contenido desarrollado en 6°, pero no es indispensable para su desarrollo.

Solución de algunos ítems:



Fecha: **U6 1.9**

Ⓟ En la tabla se muestran pares ordenados de x y y, que están en proporcionalidad directa $y = 2x$.

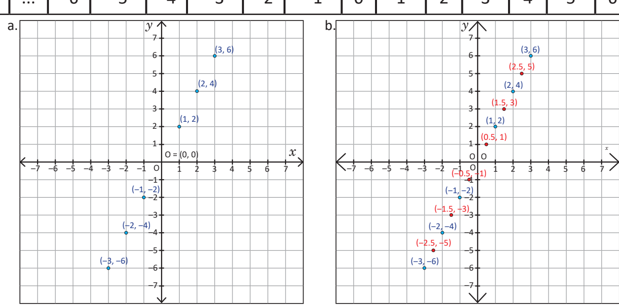
x	...	−3	−2	−1	0	1	2	3	...
y	...	−6	−4	−2	0	2	4	6	...

a) Ubica los pares ordenados anteriores en el plano cartesiano.

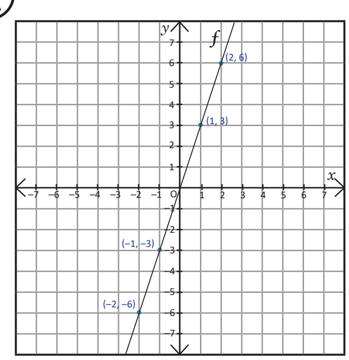
b) Ubica los siguientes pares ordenados en otro plano cartesiano.

x	...	−3	−2.5	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	...
y	...	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	...

Ⓢ



Ⓡ



Tarea: página 126 del Cuaderno de Ejercicios.

1.10 Gráfica de la proporcionalidad directa, parte 2

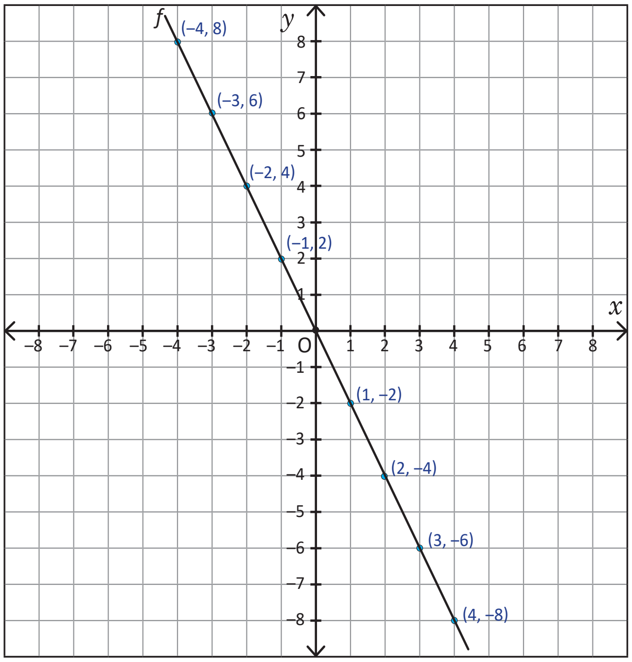
P

Elabora la gráfica de $y = -2x$ y luego responde las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el punto común por el que pasan las gráficas de proporcionalidad directa, comparado con las gráficas elaboradas en la clase anterior?
b) ¿Cuántos puntos se necesitan saber para elaborar la gráfica de una proporcionalidad directa? ¿Cuáles son?

S

x	...	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	...
y	...	8	6	4	2	0	−2	−4	−6	−8	...



Para encontrar un punto, se puede sustituir un valor entero de x en $y = ax$, y luego calcular y.

a) Los puntos se ubican en una línea recta y siempre pasan por el punto de origen O(0, 0).
b) Se necesitan 2 puntos, el punto de origen y otro punto.

C

Para elaborar la gráfica de proporcionalidad directa $y = ax$, se toma el punto de origen O(0, 0) y otro punto; luego se traza la línea recta que pasa por estos puntos.

Elabora una gráfica de las siguientes proporcionalidades directas:

a) $y = -4x$
b) $y = 4x$
c) $y = -1.5x$
d) $y = -\frac{2}{3}x$

Indicador de logro

1.10 Grafica una relación de proporcionalidad directa a partir de dos pares ordenados.

Secuencia

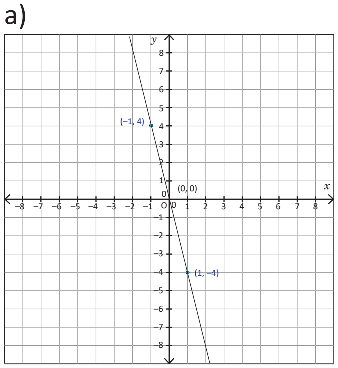
En la clase anterior se aprendió a graficar la relación de proporcionalidad directa cuando la constante de proporcionalidad es positiva, y para esta clase se trabajará la gráfica de proporcionalidad directa cuando la constante de proporcionalidad es negativa. También se establece un proceso resumido para hacer la gráfica de una relación de proporcionalidad independientemente de si su constante es positiva o negativa. En esta clase es cuando el estudiante identifica que según el signo de la constante de proporcionalidad, positivo o negativo, la dirección de la recta inclinada cambia de derecha a izquierda respectivamente.

Propósito

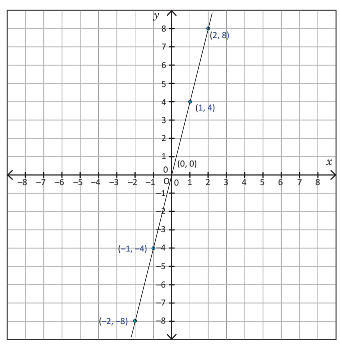
Ⓟ, Ⓢ Determinar que toda gráfica de una proporcionalidad directa pasa por el origen. Se debe hacer énfasis en que no es necesario construir una tabla con valores para las variables para poder hacer la gráfica, ya que basta con tomar dos puntos, por ejemplo, el origen y un punto más.

Solución de algunos ítems:

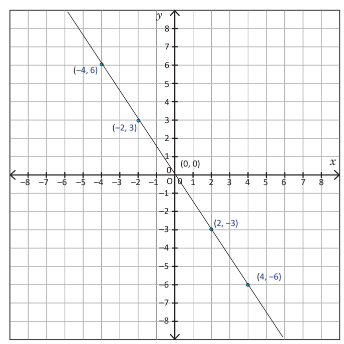
a)



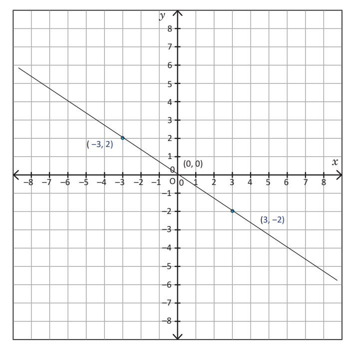
b)



c)



d)



Fecha: **U6 1.10**

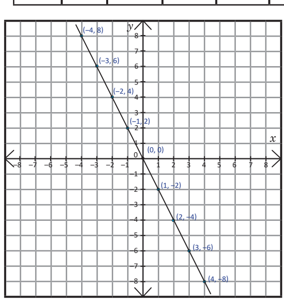
P Elabora la gráfica de $y = -2x$ y luego responde:

a) ¿Cuál es el punto común por el que pasa la gráfica de $y = -2x$ y las de la clase anterior?

b) ¿Cuántos puntos necesitas para hacer la gráfica de proporcionalidad directa? ¿Cuáles son?

S

x	...	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	...
y	...	8	6	4	2	0	−2	−4	−6	−8	...

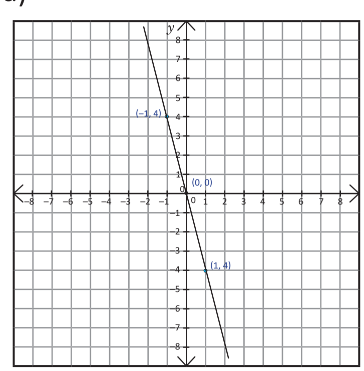


a) Los puntos se ubican en una línea recta y siempre pasan por el punto de origen O(0, 0).

b) Se necesitan 2 puntos, el punto de origen y otro punto.

R

a)

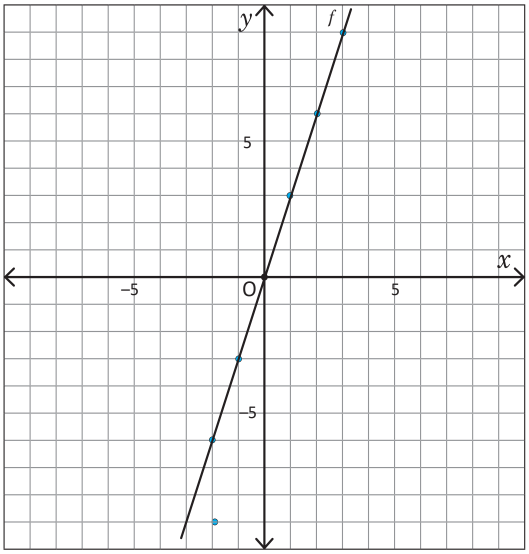


Tarea: página 128 del Cuaderno de Ejercicios.

1.11 Representación $y = ax$ de la proporcionalidad directa a partir de la gráfica

P

A continuación, se presenta la gráfica de la proporcionalidad directa. Escribe esta relación en forma de $y = ax$.



En la clase 6 de esta unidad aprendiste cómo expresar en la forma $y = ax$, la relación de dos variables a partir de un par ordenado.

Sustituyendo un par ordenado en $y = ax$, se puede encontrar la constante a.

S

Solución 1:
Como la gráfica pasa por el punto (1, 3), sustituye en x y y.

$$y = ax$$
$$3 = 1a$$
$$3 = a$$

Entonces, $y = 3x$.

Solución 2:
Como la gráfica pasa por el punto (−2, −6), sustituye por x y y.

$$y = ax$$
$$-6 = -2a$$
$$3 = a$$

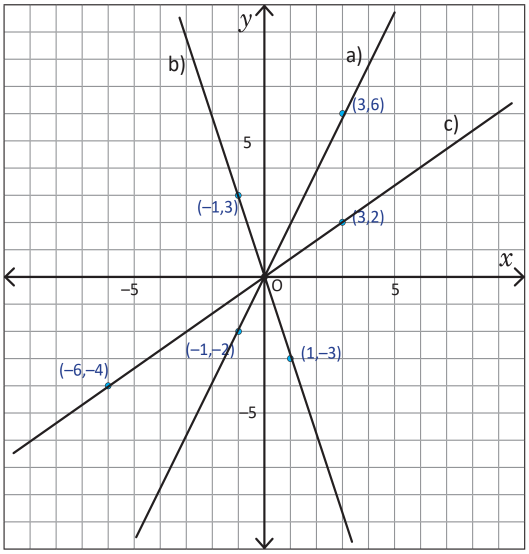
Entonces, $y = 3x$.

C

Para escribir $y = ax$ a partir de la gráfica:

1. Eligir un punto diferente del origen (par ordenado) por el que pasa la gráfica, cuyos valores sean números enteros.
2. Sustituir el valor de x y y del par ordenado en $y = ax$ y encontrar el valor de la constante a.
3. Escribir $y = ax$, sustituyendo a por el valor encontrado en 2.

Determina $y = ax$, para cada literal a partir de las siguientes 3 gráficas de proporcionalidad directa.



a) $y = 2x$

b) $y = -3x$

c) $y = \frac{2}{3}x$

Unidad 6

Indicador de logro

1.11 Representa una relación de proporcionalidad directa en la forma de $y = ax$, a partir de la gráfica.

Secuencia

En la clase 1.6 de esta unidad se obtuvo la ecuación que representaba la relación de proporcionalidad a partir de un par de valores para x y y (par ordenado). Ahora que los estudiantes ya la conocen, se determinará la ecuación de la relación de proporcionalidad directa representada en la gráfica y para ello se hará uso de la estrategia para graficar una relación de proporcionalidad directa establecida en la Ⓒ de la clase anterior.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Determinar la forma $y = ax$ de una relación de proporcionalidad directa a partir de su gráfica. Para desarrollar el Ⓟ se espera que se haga uso de lo visto en la clase 1.6 de esta unidad. Si los estudiantes presentan dificultades puede indicar que lean los recuadros de presaber e información adicional que se presentan en el libro de texto.

Solución de algunos ítems:

a) Como la gráfica pasa por (3, 6), sustituye en x y y.

$y = ax$
$6 = 3a$ Entonces, $y = 2x$
$2 = a$

c) Como la gráfica pasa por (3, 2), sustituye en x y y.

$y = ax$
$2 = 3a$ Entonces, $y = \frac{2}{3}x$
$\frac{2}{3} = a$

d) Como la gráfica pasa por (–1, 3), sustituye en x y y.

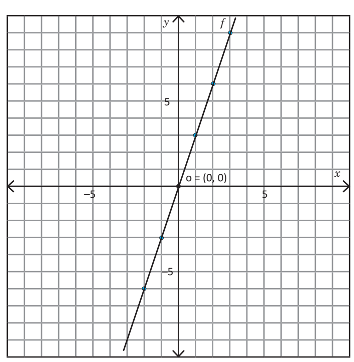
$y = ax$
$3 = -a$ Entonces, $y = -3x$
$-3 = a$

En el texto aparecen las letras f y g en el plano cartesiano, pero estas letras se deben borrar porque no tienen ninguna finalidad en el ítem.

Fecha:

U6 1.11

Ⓟ Escribe la relación graficada en el plano en la forma de $y = ax$.



Ⓢ Solución 1.
Como la gráfica pasa por (1, 3), sustituye en x y y.
$y = ax$
$3 = 1a$ Entonces, $y = 3x$
$3 = a$

Solución 2.
Como la gráfica pasa por (–2, –6), sustituye por x y y.
$y = ax$
$-6 = -2a$ Entonces, $y = 3x$
$3 = a$

Ⓡ

a) $y = 2x$

c) $y = \frac{2}{3}x$

d) $y = -3x$

Tarea: página 129 del Cuaderno de Ejercicios.

1.12 Gráfica de proporcionalidad directa cuando las variables toman ciertos valores

P

En una pila cuya capacidad máxima es de 12 galones, se vierte agua a un ritmo de 2 galones por minuto. Si se expresa el tiempo en que se vierte el agua como x minutos y la cantidad de agua de la pila como y galones:

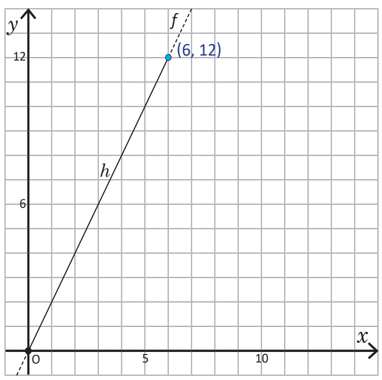
a) Escribe $y = ax$.
b) Determina qué valores toman x y y, usando los signos de desigualdades.
c) Representa $y = ax$ en la gráfica.

S

a) Como la constante es 2, entonces, $y = 2x$.

b) Para verter los 12 galones, se tarda 6 minutos, por lo que el tiempo x toma los valores $0 \leq x \leq 6$; mientras que la cantidad de agua y, tiene los valores $0 \leq y \leq 12$.

c)



C

Para los valores de las variables que están limitados, se toma la parte correspondiente de la gráfica. Para los valores que están fuera del límite se pueden representar con una línea punteada.

Grafica las siguientes situaciones de proporcionalidad directa:

1. Para viajar 8 km se camina 2 km por hora. Dado que la hora se expresa como x horas y la distancia recorrida con y km:

   a) Escribe $y = ax$. — $y = 2x$
   b) Determina qué valores toman x y y, usando los signos de desigualdades. — $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 8$
   c) Representa $y = ax$ en la gráfica.

2. Un recipiente en el cual caben 8 litros está lleno de agua, pero hay una fuga en la que se pierden 0.5 litros por minuto. Dado que el tiempo se expresa como x minutos y la cantidad de agua que se ha fugado del recipiente como y litros, realiza lo siguiente:

   a) Escribe $y = ax$. — $y = 0.5x$
   b) Determina qué valores toman x y y, usando los signos de desigualdades. — $0 \leq x \leq 16$, $0 \leq y \leq 8$
   c) Representa $y = ax$ en la gráfica.

Indicador de logro

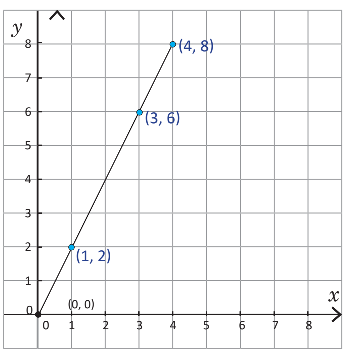
1.12 Grafica la relación de proporcionalidad directa entre dos variables cuando los valores que toman son limitados.

Secuencia

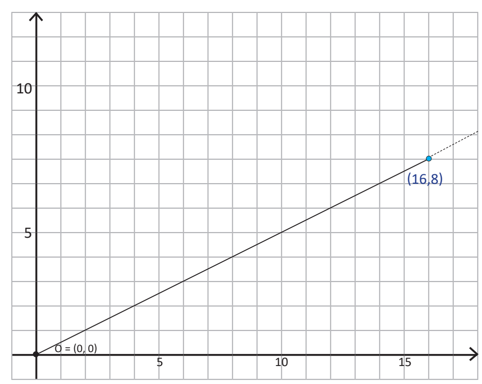
En la clase 1.3 se trabajó con dos variables que tienen una relación directamente proporcional cuyos valores son limitados; para esta clase se toman las relaciones de proporcionalidad con esta característica (valores limitados para las variables) y se grafican en el plano cartesiano. Es importante establecer que para los valores que están dentro de los límites se toma la parte del gráfico correspondiente y se dibuja en forma continua y para los valores fuera de los límites la parte de la gráfica correspondiente se dibuja en forma punteada.

Solución de algunos ítems:

1.
a) $y = 2x$
b) $0 < x \leq 4$
c) $0 < y \leq 8$



2.
a) $y = 0.5x$
b) $0 < x \leq 16$
c) $0 < y \leq 8$



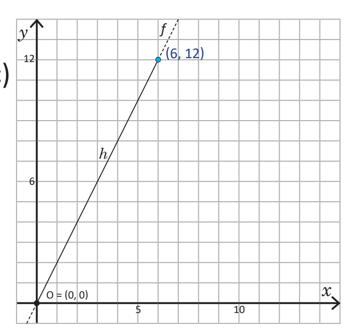
En el numeral 2 la pregunta debe hacer referencia a la cantidad de agua que queda fuera del recipiente y no a la que queda dentro del recipiente. En 2, a pesar de que se analiza la fuga de agua, la constante es positiva para facilitar la interpretación de la variable y, ya que si se establece la constante negativa y se dice que la variable representa la cantidad filtrada, entonces se estaría diciendo que no se está filtrando sino agregando.

Fecha: **U6 1.12**

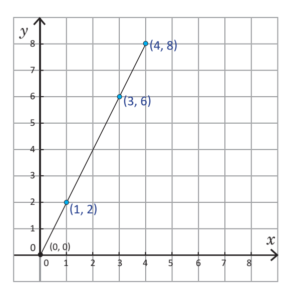
Ⓟ Capacidad máxima de la pila: 12 gal, se vierte agua a un ritmo de 2 gal por minuto. Se define el tiempo en que se vierte el agua como x minutos y la cantidad de agua de la pila como y galones.
a) Escribe $y = ax$.
b) Qué valores toman x y y (con desigualdades).
c) Representa $y = ax$ en la gráfica.

Ⓢ a) Como la constante es 2, entonces, $y = 2x$.
b) Para verter los 12 galones, se tarda 6 minutos, $0 \leq x \leq 6$; la cantidad de agua y, $0 \leq y \leq 12$.

c)



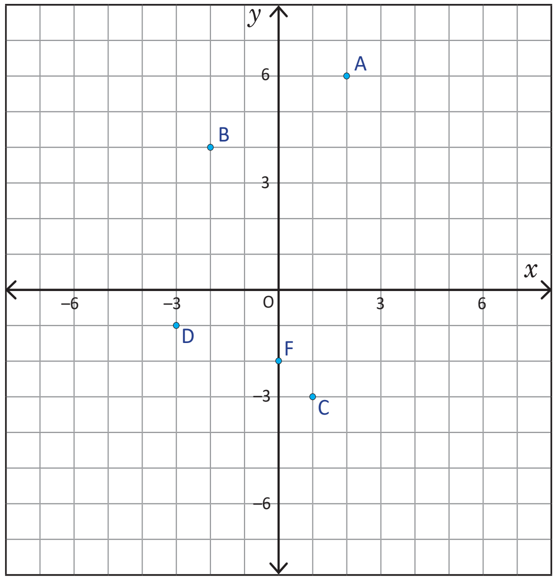
Ⓡ 1.
a) $y = 2x$
b) $0 \leq x \leq 4$
c) $0 \leq y \leq 8$



Tarea: página 130 del Cuaderno de Ejercicios.

1.13 Practica lo aprendido

1. Escribe los siguientes puntos en pares ordenados.



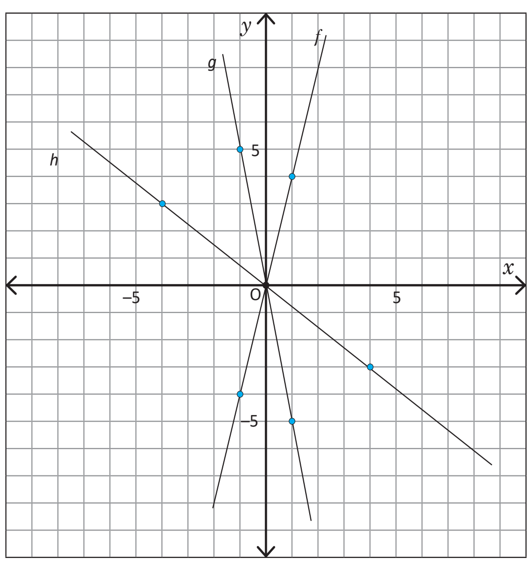
A(2, 6)
B(−2, 4)
C(1, −3)
D(−3, −1)

2. Elabora la gráfica a partir de la siguiente tabla:

x	...	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	...
y	...	−8	−6	−4	−2	0	2	4	6	8	...

3. Si y es directamente proporcional a x, elabora la gráfica para los siguientes casos:
   a) $y = 3x$ b) $y = -3x$

4. Para cada una de las gráficas de proporcionalidad directa, escribe en forma de $y = ax$ la relación entre las variables.



f) $y = 4x$

g) $y = -5x$

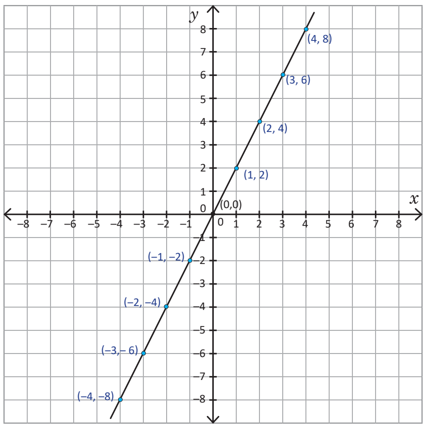
h) $y = -\frac{3}{4}x$

Indicador de logro

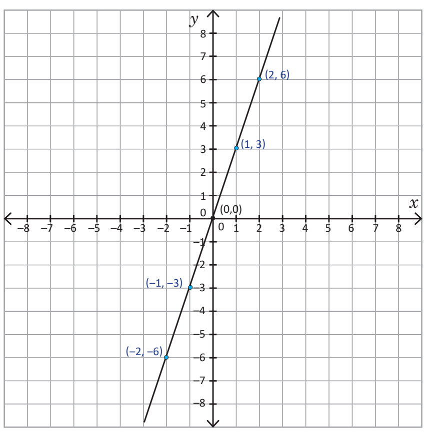
1.13 Resuelve problemas correspondientes a la proporcionalidad directa.

Solución de algunos ítems:

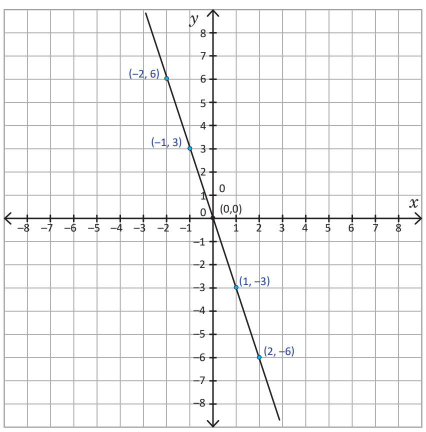
2.



3. a)



b)



4.

f) Como la gráfica pasa por (1, 4), sustituye en x y y.

$y = ax$

$4 = a$

g) Como la gráfica pasa por (–1, 5), sustituye en x y y.

$y = ax$

$5 = -a$ Entonces, $y = -5x$

$-5 = a$

h) Como la gráfica pasa por (–4, 3), sustituye en x y y.

$y = ax$

$3 = -4a$ Entonces, $y = -\frac{3}{4}x$

$-\frac{3}{4} = a$

Entonces, $y = 4x$

Tarea: página 131 del Cuaderno de Ejercicios.

2.1 Concepto de la proporcionalidad inversa

P

Se tienen varios cuadriláteros cuya área es de 6 cm^2, considerando que la medida de la base es x cm y la altura es y cm, haz lo siguiente:

a) Completa la tabla:

x (base, cm)	1	2	3	4	5	6	...
y (altura, cm)	6			1.5	1.2		...

b) Cuando x cambia al ser multiplicado por 2, 3, 4..., ¿cómo cambia el valor de y?
c) ¿Cómo se llama esta relación?
d) Expresa el área con x y y.
e) Despeja y en la expresión del inciso d).

S

a)

$\times 2$ $\times 3$ $\times 4$

x (base, cm)	1	2	3	4	5	6	...
y (altura, cm)	6	3	2	1.5	1.2	1	...

$\times \frac{1}{2}$ $\times \frac{1}{3}$ $\times \frac{1}{4}$

b) Tal como se muestra, cuando x cambia al ser multiplicado por 2, 3, 4..., y cambia por $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ... respectivamente.

c) A esta relación se le conoce como proporcionalidad inversa.

d) $6 = xy$.

e) Al despejar y, se obtiene $y = \frac{6}{x}$.

C

Cuando y es función de x y se expresa en forma de $y = \frac{a}{x}$ o $(xy = a)$ (a es constante y x no se considera 0), se dice que y es inversamente proporcional a x. Al número a se le llama constante de la proporcionalidad. En la proporcionalidad inversa, cuando una variable x se multiplica por 2, 3, 4..., la otra variable y se multiplica por $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ... Y para encontrar la constante a, se multiplica xy.

Para cada una de las siguientes situaciones, si la relación entre las variables es de proporcionalidad inversa, elabora una tabla, escribe la constante y la expresión $y = \frac{a}{x}$.

a) En un recorrido de 12 km, la velocidad es x km/h y el tiempo es y horas.
$y = \frac{12}{x}$
b) Si se dispone de $20, el dinero que se gasta es x dólares y el que sobra es y dólares.
No son cantidades inversamente proporcionales.
c) Cuando una cinta de 8 cm de longitud se reparte equitativamente entre x personas. El número de personas x y la longitud de la tira de cada persona es y cm.
$y = \frac{8}{x}$

Indicador de logro

2.1 Identifica si la relación de dos cantidades es de proporcionalidad inversa, expresándola en la forma $y = ax$ e indicando la constante.

Secuencia

En primero y segundo ciclo de educación básica los estudiantes aprendieron a identificar una relación de proporcionalidad inversa entre dos cantidades x y y y la forma de representar la relación, es decir con $y = constante \div x$.

Por lo que a partir de esta clase se retoma este tema, con la diferencia de que para la representación de una relación de proporcionalidad directa se omite la escritura de (÷) en su representación, es decir, la escritura se hace como $y = \frac{a}{x}$ o $xy = a$. De modo que se establece que a se llama constante de proporcionalidad.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Identificar que al hacer la multiplicación de x por 2, 3, 4... y es multiplicado por $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$... obteniendo que el valor de $xy = 6$ es constante para poder determinar la forma $y = \frac{a}{x}$ que representa la relación de las dos variables. En el desarrollo del Ⓟ de la clase los estudiantes pueden auxiliarse de lo aprendido en sexto grado acerca de la relación de dos cantidades inversamente proporcionales.

Solución de algunos ítems:

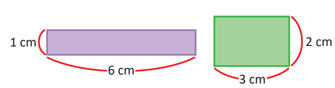
a) $xy = a$
$xy = 12$
$y = \frac{12}{x}$

b) No son cantidades inversamente proporcionales.

c) $xy = a$
$xy = 8$
$y = \frac{8}{x}$

Fecha: **U6 2.1**

Ⓟ El área de los cuadriláteros es 6 cm², su base es x cm y la altura es y cm, haz lo siguiente:



a) Completa la tabla.
b) Cuando x se multiplica por 2, 3..., ¿cómo cambia el valor de y?
c) ¿Cómo se llama esta relación?
d) Expresa el área con x y y.
e) Despeja y en la expresión del inciso d).

Ⓢ

a)

× 2 × 3 × 4

x (base, cm)	1	2	3	4	5	6	...
y (altura, cm)	6	3	2	1.5	1.2	1	...

$\times\frac{1}{2}$ $\times\frac{1}{3}$ $\times\frac{1}{4}$

b) Cuando x es multiplicado por 2, 3, 4..., y es multiplicado por $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$... respectivamente.
c) A esta relación se le conoce como proporcionalidad inversa.
d) $6 = xy$.
e) Al despejar y, se obtiene $y = \frac{6}{x}$.

Ⓡ

a) $y = \frac{12}{x}$

b) No son cantidades inversamente proporcionales.

c) $y = \frac{8}{x}$

Tarea: página 132 del Cuaderno de Ejercicios.

2.2 Proporcionalidad inversa con valores negativos en las variables

P

Encuentra los valores de las variables que están en proporcionalidad inversa y realiza lo siguiente:

a) Completa la tabla cuyos valores tienen la siguiente relación $y = \frac{12}{x}$ ($xy = 12$), considera algunos valores negativos para x. Luego responde las preguntas.

x	...	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	...
y	...					−6			12				2.4		...

b) Cuando $0 < x$, y x cambia al ser multiplicado por 2, 3, 4..., ¿cómo cambia el valor de y?

c) Cuando $0 > x$, y x cambia al ser multiplicado por 2, 3, 4..., ¿cómo cambia el valor de y?

d) Cuando x toma valores negativos, ¿se observan las mismas características de la proporcionalidad inversa descubiertas en la clase anterior?

S

a)

x	...	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	...
y	...	−2	−2.4	−3	−4	−6	−12		12	6	4	3	2.4	2	...

× 4, × 3, × 2; × 2, × 3, × 4

$\times\frac{1}{4}$, $\times\frac{1}{3}$, $\times\frac{1}{2}$; $\times\frac{1}{2}$, $\times\frac{1}{3}$, $\times\frac{1}{4}$

12 12 12 12 12

b) El valor de y es multiplicado por $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ...

c) El valor de y es multiplicado por $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ...

d) Aunque la variable x tome valores negativos, el valor de la variable y correspondiente va cambiando por $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ...

C

Cuando y es inversamente proporcional a x, aunque x tome valores negativos, las características se mantienen.

E

Si $y = -\frac{6}{x}$, ¿es y inversamente proporcional a x?

x	...	−3	−2	−1	0	1	2	3	...
y	...	2	3	6		−6	−3	−2	...

× 3, × 2; × 2, × 3

$\times\frac{1}{3}$, $\times\frac{1}{2}$; $\times\frac{1}{2}$, $\times\frac{1}{3}$

−6 −6 −6 −6 −6 −6

$y = -\frac{6}{x}$ significa $y = \frac{-6}{x}$, es decir, la constante es negativa (−6).

En la proporcionalidad inversa la constante puede ser negativa.

Completa las tablas e identifica la constante y escribe $y = \frac{a}{x}$.

1.

x	...	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	...
y	...	−2	−2.6...	−4	−8		8	4	2.6...	2	...

2.

x	...	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	...
y	...	3	4	6	12		− 12	−6	−4	−3	...

Indicador de logro

2.2 Representa en la forma $y = ax$, dos variables que están en una relación de proporcionalidad inversa, a partir de una tabla.

Secuencia

En primero y segundo ciclo de educación básica, los estudiantes identificaron y representaron relaciones de proporcionalidad inversa entre dos variables x y y cuando los valores que tomaban ambas variables eran positivos. Dado que los estudiantes en la Unidad 1 aprendieron a operar con los números negativos, en esta clase se analizan relaciones de proporcionalidad inversa cuando los valores que toman las variables pueden ser negativos.

Propósito

Ⓟ En el Ⓟ se planteó una situación de proporcionalidad inversa en la que la constante de proporcionalidad era positiva, de modo que en el Ⓔ se presenta el caso en el que la constante es negativa. Se debe enfatizar el hecho de que la constante de proporcionalidad puede ser negativa. Para hacer más evidente esta característica puede señalarse que

$y = -\frac{6}{x}$ significa $y = \frac{-6}{x}$, es decir, la constante –6 es negativa.

Solución de algunos ítems:

1. $xy = a$

$xy = 8$

$y = \frac{8}{x}$

Calculando algunos valores:

$y = \frac{8}{x}$ $\quad y = \frac{8}{x}$ $\quad y = \frac{8}{x}$

$y = \frac{8}{-2}$ $\quad y = \frac{8}{3}$ $\quad y = \frac{8}{3}$

$y = -4$ $\quad y = 2.6...$ $\quad y = 2$

2. $xy = a$

$xy = -12$

$y = \frac{-12}{x}$

Calculando algunos valores:

$y = -\frac{12}{x}$ $\quad y = -\frac{12}{x}$ $\quad y = -\frac{12}{x}$

$y = -\frac{12}{-4}$ $\quad y = -\frac{12}{-2}$ $\quad y = -\frac{12}{3}$

$y = 3$ $\quad y = 6$ $\quad y = -4$

Fecha: **U6 2.2**

Ⓟ Si x y y son inversamente proporcionales:

a) Completa la tabla para la relación $y = \frac{12}{x}$

b) Si $0 < x$, y x se multiplica por 2, 3..., ¿cómo cambia el valor de y?

c) Si $0 > x$, y x se multiplica por 2, 3..., ¿cómo cambia el valor de y?

d) Si $x < 0$, ¿la proporcionalidad inversa tiene las mismas características vistas antes?

Ⓢ a)

x	...	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	...
y	...	–2	–2.4	–3	–4	–6	–12		12	6	4	3	2.4	2	...

b) El valor de y es multiplicado por $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$...

c) El valor de y es multiplicado por $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$...

d) Sí, porque los valores correspondientes de y se van multiplicando por $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$...

Ⓔ

x	...	–3	–2	–1	0	1	2	3	...
y	...	2	3	6		–6	–3	–2	...

En la proporcionalidad inversa la constante puede ser negativa.

Ⓡ

1. –2, –4, 4, 2

2. 3, 4, 6, 12, –6, –4, –3

Tarea: página 133 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 2

2.3 Representación en la forma $y = \frac{a}{x}$ a partir de un par ordenado

P

Si y es inversamente proporcional a x y además $x = 4$, $y = 6$, representa en la forma $y = \frac{a}{x}$ la relación entre las variables.

Como ya se conocen los valores de x y y, solamente basta encontrar el valor de a.

S

Como se sabe se sustituyen los valores de x y y, luego se encuentra el valor de a.

Utilizando $y = \frac{a}{x}$,
cuando $x = 4$, $y = 6$.
Entonces, $6 = \frac{a}{4}$

$a = 6 \times 4$

$a = 24$.

Entonces, $y = \frac{24}{x}$.

Utilizando $xy = a$,
cuando $x = 4$, $y = 6$.
Entonces, $4 \times 6 = a$

$a = 24$.

Entonces, $y = \frac{24}{x}$.

C

Para representar la relación de proporcionalidad inversa de la forma $y = \frac{a}{x}$, a partir de algunos valores determinados de las variables:

1. Se sustituyen los valores en las variables y se forma una ecuación.

2. Se encuentra el valor de la constante en la ecuación.

3. Se sustituye el valor de la constante en $y = \frac{a}{x}$.

1. Si y es inversamente proporcional a x, representa en la forma de $y = \frac{a}{x}$, para cada uno de los siguientes literales:

a) Cuando $x = 3$, $y = 5$
$y = \frac{15}{x}$

b) Cuando $x = 4$, $y = 2$
$y = \frac{8}{x}$

c) Cuando $x = -2$, $y = 7$
$y = -\frac{14}{x}$

d) Cuando $x = 6$, $y = -3$
$y = -\frac{18}{x}$

e) Cuando $x = 4$, $y = \frac{1}{2}$
$y = \frac{2}{x}$

f) Cuando $x = -3$, $y = -\frac{2}{3}$
$y = \frac{2}{x}$

g) Cuando $x = -12$, $y = \frac{2}{3}$
$y = -\frac{8}{x}$

2. Redacta una situación de proporcionalidad inversa, la cual se represente con

$$y = \frac{16}{x}.$$

Ejemplo: el área de los cuadrados es 16 cm^2, x cm es la medida de la base y y cm es la medida de la altura.

Indicador de logro

2.3 Representa en la forma $y = ax$, dos variables que están en una relación de proporcionalidad inversa a partir de un par de valores de y y x.

Secuencia

En esta clase se determina la ecuación que representa a una relación de proporcionalidad inversa entre dos variables x y y, a partir de un par ordenado. Es la primera vez que se determina la representación de una relación de proporcionalidad inversa sin hacer uso de una tabla para analizar la relación.

Solución de algunos ítems:

a) $a = xy$
$a = 3 \times 5$ $\quad y = \frac{15}{x}$
$a = 15$

d) $a = xy$
$a = 6 \times (-3)$ $\quad y = \frac{-18}{x} = -\frac{18}{x}$
$a = -18$

g) $a = xy$
$a = -12 \times \frac{2}{3}$ $\quad y = \frac{-8}{x} = -\frac{8}{x}$
$a = -8$

Aunque está indicado que se represente en la forma $y = \frac{a}{x}$, cuando $a < 0$, se pone el signo negativo antes de la fracción. Ejemplo: $y = -\frac{14}{x}$.

Fecha: **U6 2.3**

Ⓟ Si y es inversamente proporcional a x y además $x = 4$, $y = 6$, representa en la forma $y = \frac{a}{x}$ la relación entre las variables.

Ⓢ Como se sabe se sustituyen los valores de x y y, luego se encuentra el valor de a.

Utilizando $y = \frac{a}{x}$,
cuando $x = 4$, $y = 6$.
Entonces, $6 = \frac{a}{4}$
$a = 6 \times 4$
$a = 24$
Entonces, $y = \frac{24}{x}$.

Utilizando $xy = a$,
cuando $x = 4$, $y = 6$.
Entonces, $4 \times 6 = a$
$a = 24$
Entonces, $y = \frac{24}{x}$.

Ⓡ
a) $y = \frac{15}{x}$
b) $y = \frac{8}{x}$
c) $y = -\frac{14}{x}$
d) $y = -\frac{18}{x}$
e) $y = \frac{2}{x}$

Tarea: página 134 del Cuaderno de Ejercicios.

2.4 Gráfica de proporcionalidad inversa cuya constante es positiva

P

Para la siguiente relación de proporcionalidad inversa $y = \frac{12}{x}$ ($xy = 12$) haz lo siguiente:

a) Completa la tabla.
b) Elabora la gráfica en el plano cartesiano.

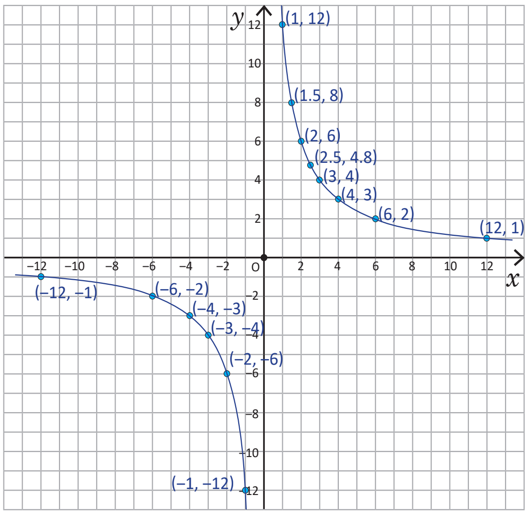
x	...	−12	...	−6	...	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	...	6	...	12	...
y	...		...		...			−6			12				...		...		...

S

a)

x	...	−12	...	−6	...	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	...	6	...	12	...
y	...	−1	...	−2	...	−3	−4	−6	−12		12	6	4	3	...	2	...	1	...

b) Al ubicar los puntos en el plano cartesiano, basados en los pares ordenados de la tabla y al colocar otros puntos tales como (1.5, 8), (2.5, 4.8), (−1.5, −8), (−1.25, −9.6), etc. La gráfica se representa de la siguiente manera:



C

La gráfica de proporcionalidad inversa consta de dos líneas curvas.

En cada literal, completa la tabla que representa la proporcionalidad inversa y elabora la gráfica.

a) $y = \frac{6}{x}$

x	...	−6	...	−3	−2	−1	0	1	2	3	...	6	...
y	...	−1	...	−2	−3	−6		6	3	2	...	1	...

b) $y = \frac{9}{x}$

x	...	−9	...	−5	...	−3	−2	−1	0	1	2	3	...	5	...	9	...
y	...	−1	...	−1.8	...	−3	−4.5	−9		9	4.5	3	...	1.8	...	1	...

Unidad 6

Indicador de logro

2.4 Grafica una relación de proporcionalidad inversa cuando su constante es positiva.

Secuencia

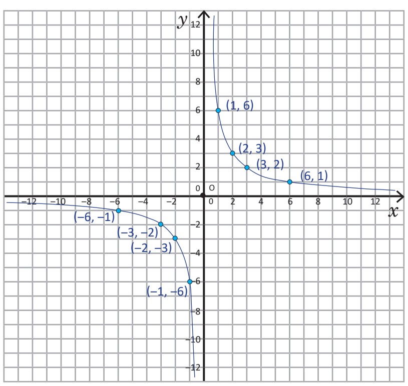
En la lección anterior se aprendió a graficar una relación de proporcionalidad directa, de forma que los estudiantes ya tienen habilidad para ubicar puntos en el plano. Ahora a partir de una tabla de valores para dos variables inversamente proporcionales x y y, cuya constante de proporcionalidad es positiva, se forman pares ordenados que tienen que graficarse en el plano, de modo que los estudiantes obtengan la gráfica de proporcionalidad inversa y observen que son dos líneas curvas.

a) Calculando algunos valores:

$y = \frac{6}{x}$ $\quad y = \frac{6}{x}$ $\quad y = \frac{6}{x}$

$y = \frac{6}{-2}$ $\quad y = \frac{6}{3}$ $\quad y = \frac{6}{6}$

$y = -3$ $\quad y = 2$ $\quad y = 1$

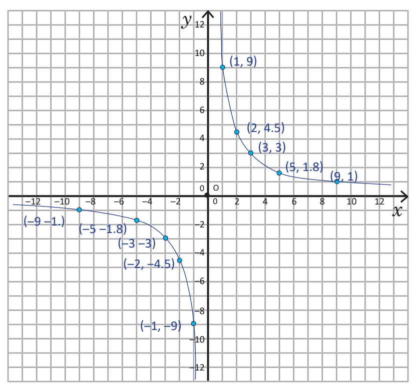


b) Calculando algunos valores:

$y = \frac{9}{x}$ $\quad y = \frac{9}{x}$ $\quad y = \frac{9}{x}$

$y = \frac{9}{-3}$ $\quad y = \frac{9}{-5}$ $\quad y = \frac{9}{-9}$

$y = -3$ $\quad y = -1.8$ $\quad y = -1$



Fecha: **U6 2.4**

(P) Para la relación de proporcionalidad inversa $y = \frac{12}{x}$:

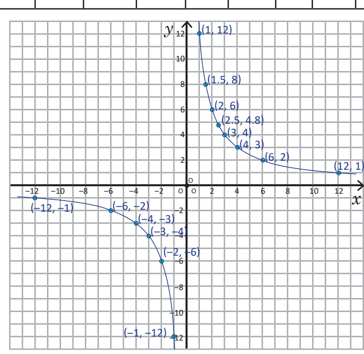
a) Completa la tabla.

b) Elabora la gráfica en el plano cartesiano.

(S) a)

x	...	−12	...	−6	...	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	...	6	...	12	...
y	...	−1	...	−2	...	−3	−4	−6	−12		12	6	4	3	...	2	...	1	...

b) Al ubicar los puntos en el plano cartesiano, se tiene:



(R)

a) −1, −2, −6, 3, 2, 1

b) −1, −1.8, −3, −4.5, 4.5, 3, 1.8, 1

Tarea: página 135 del Cuaderno de Ejercicios.

2.5 Gráfica de proporcionalidad inversa cuya constante es negativa

P

Para la siguiente relación de proporcionalidad inversa $y = -\frac{12}{x}$ $(xy = -12)$ haz lo siguiente:

a) Completa la tabla.

b) Elabora la gráfica en el plano cartesiano.

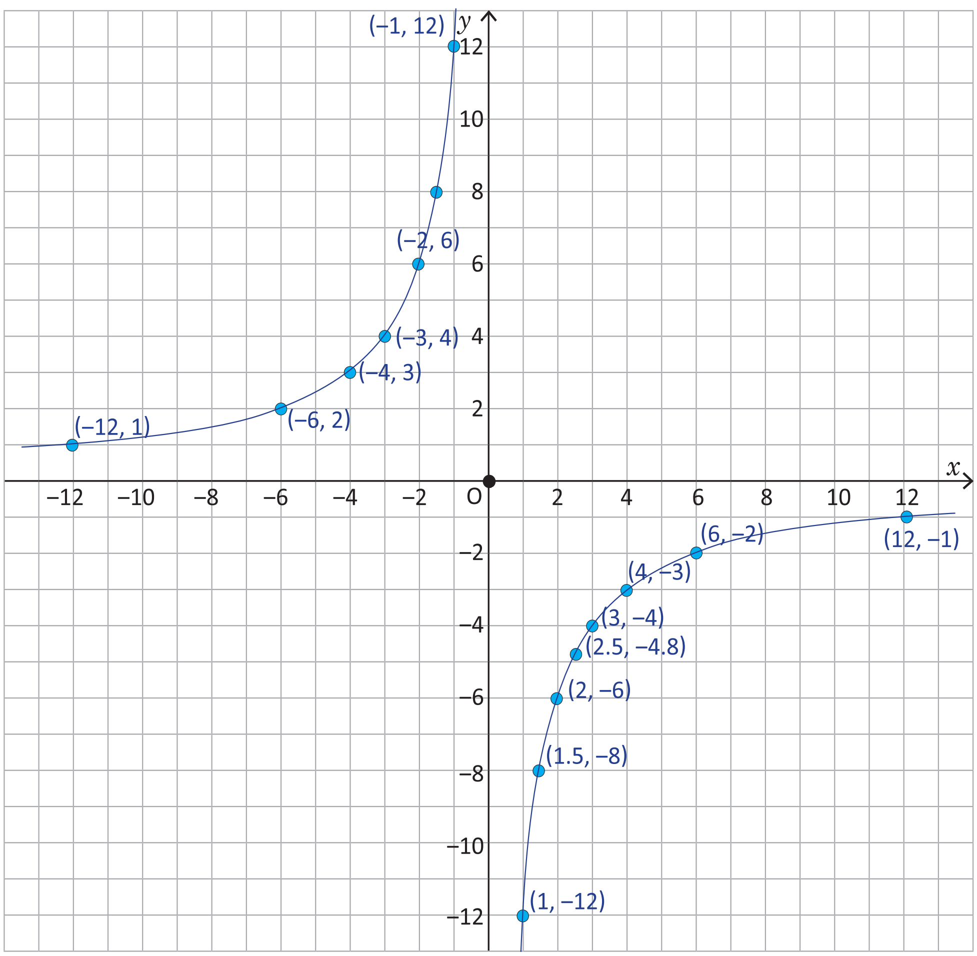
x	...	−12	...	−6	...	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	...	6	...	12	...
y	...		...		...			6			−12				...		...		...

S

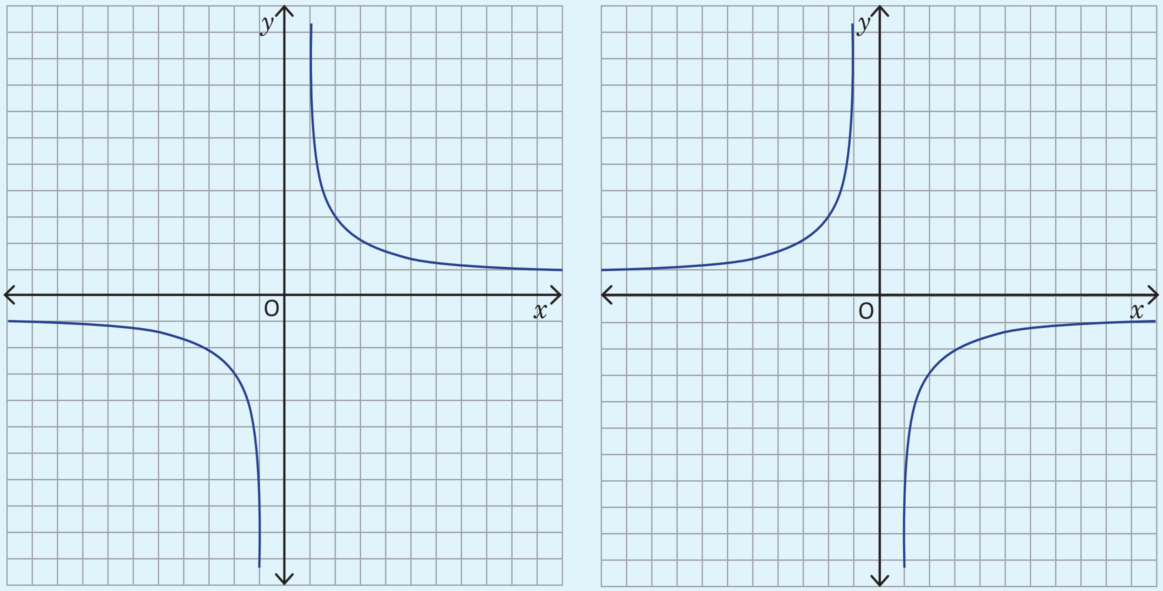
a)

x	...	−12	...	−6	...	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	...	6	...	12	...
y	...	1	...	2	...	3	4	6	12		−12	−6	−4	−3	...	−2	...	−1	...

b) Al ubicar los puntos en el plano cartesiano, basados en los pares ordenados de la tabla y al colocar otros puntos tales como (1.5, −8), (2.5, −4.8), (−1.5, 8), (−1.25, 9.6), etc. La gráfica se representa de la siguiente manera:



La gráfica de proporcionalidad inversa depende del valor de la constante a, tal como se muestra a continuación:



($a > 0$) ($a < 0$)

En cada literal, completa la tabla que representa la proporcionalidad inversa y elabora la gráfica.

a) $y = -\frac{6}{x}$

x	...	−6	...	−3	−2	−1	0	1	2	3	...	6	...
y	...	1	...	2	3	6		−6	−3	−2	...	−1	...

b) $y = -\frac{9}{x}$

x	...	−9	...	−5	...	−3	−2	−1	0	1	2	3	...	5	...	9	...
y	...	1	...	1.8	...	3	4.5	9		−9	−4.5	−3	...	−1.8	...	−1	...

Unidad 6

Indicador de logro

2.5 Grafica una relación de proporcionalidad inversa cuando su constante es negativa.

Secuencia

Anteriormente se aprendió a graficar la relación de proporcionalidad inversa cuando la constante de proporcionalidad es positiva. Para esta clase se trabajará la gráfica de proporcionalidad inversa cuando la constante es negativa y el estudiante identificará que según el signo de la constante, la gráfica cambia.

Propósito

Ⓒ, Aclarar que a diferencia de la gráfica de proporcionalidad directa, la gráfica de la proporcionalidad inversa no pasa por el origen ya sea que tenga constate positiva o negativa.

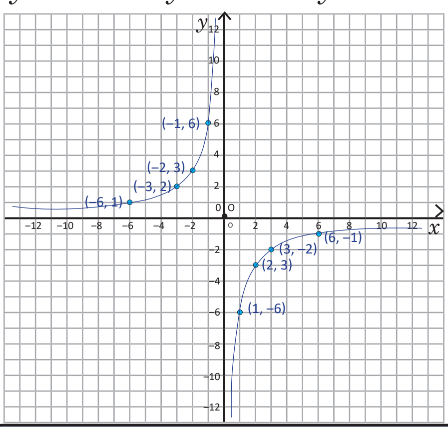
Solución de algunos ítems:

a) Calculando algunos valores:

$y = -\frac{6}{x}$ $\quad y = -\frac{6}{x}$ $\quad y = -\frac{6}{x}$

$y = -\frac{6}{-3}$ $\quad y = -\frac{6}{-1}$ $\quad y = -\frac{6}{6}$

$y = 2$ $\quad y = 6$ $\quad y = -1$



b) Calculando algunos valores:

$y = -\frac{9}{x}$ $\quad y = -\frac{9}{x}$ $\quad y = -\frac{9}{x}$

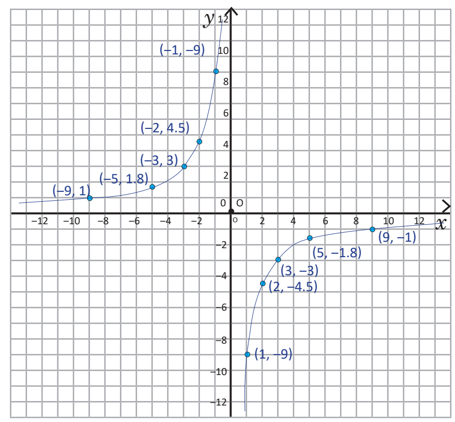
$y = -\frac{9}{-5}$ $\quad y = -\frac{9}{-3}$ $\quad y = -\frac{9}{-2}$

$y = 1.8$ $\quad y = 3$ $\quad y = 4.5$

$y = -\frac{9}{x}$ $\quad y = -\frac{9}{x}$ $\quad y = -\frac{9}{x}$

$y = -\frac{9}{2}$ $\quad y = -\frac{9}{3}$ $\quad y = -\frac{9}{5}$

$y = -4.5$ $\quad y = -3$ $\quad y = -1.8$



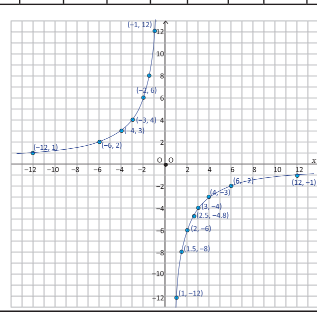
Fecha: **U6 2.5**

Ⓟ Para la relación de proporcionalidad inversa $y = -\frac{12}{x}$:
a) Completa la tabla.
b) Elabora la gráfica en el plano cartesiano.

Ⓢ a)

x	...	−12	...	−6	...	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	...	6	...	12	...
y	...	1	...	2	...	3	4	6	12		−12	−6	−4	−3	...	−2	...	−1	...

b) Al ubicar los puntos en el plano cartesiano, se tiene:



Ⓡ
a) 1, 2, 6, −3, −2, −1

b) 1, 1.8, 3, 4.5, 9, −4.5, −3, −1.8, −1

Tarea: página 137 del Cuaderno de Ejercicios.

3.1 Regla de tres simple directa

P

La siguiente tabla representa dos variables directamente proporcionales, pero se han manchado ciertas partes con tinta negra. Encuentra el valor de y que corresponde a $x = 6$.

x		3		6			...
y		12				36	...

Puedes usar la idea de la propiedad fundamental de las proporciones:

si $\boldsymbol{a : b = c : d}$, entonces $\boldsymbol{ad = bc}$.

O también puedes usar la constante de proporcionalidad.

S

Usando la propiedad fundamental de proporcionalidad.

$$3 : 12 = 6 : d$$

$$3d = 12 \times 6$$

$$d = 24$$

Usando la constante de la proporcionalidad. Como x y y son directamente proporcionales, $\frac{y}{x} = a$ y a es constante, entonces:

$$\frac{12}{3} = \frac{d}{6}$$

$$d = \frac{12}{3} \times 6$$

$$d = 24$$

C

Cuando hay dos cantidades directamente proporcionales, y un dato desconocido, se puede encontrar el valor del dato desconocido usando las soluciones presentadas. A este proceso se le llama **regla de tres simple directa**. Por lo general, si se tienen los datos:

x	a	c
y	b	d

Para encontrar uno de ellos se puede hacer lo siguiente:
1. Formar una proporción $\boldsymbol{a : b = c : d}$.
2. Aplicar $\boldsymbol{ad = bc}$.
3. Despejar el dato desconocido.

E

En la tabla del Problema inicial, encuentra el valor de x que corresponde a $y = 36$, usando regla de tres simple directa.

Solución.

x	3	c
y	12	36

Forma 1

$$3 : 12 = c : 36$$

$$12c = 3 \times 36$$

$$c = 9$$

Forma 2

$$\frac{12}{3} = \frac{36}{c}$$

$$c = \frac{3 \times 36}{12}$$

$$c = 9$$

Si y es directamente proporcional a x, encuentra los valores a, b, c y d aplicando la regla de tres simple directa.

x	...	a	...	8	9	...	12	...	c	...	25
y	...	28	...	56	b	...	84	...	147	...	d

$a = 4$
$b = 63$
$c = 21$
$d = 175$

Indicador de logro

3.1 Aplica la regla de tres simple directa para encontrar un dato desconocido, utilizando dos cantidades directamente proporcionales.

Secuencia

En primero y segundo ciclo de educación básica, los estudiantes encontraron datos faltantes en cantidades directamente proporcionales a través de operaciones aritméticas, tomando como base para el cálculo la constante de proporcionalidad. En esta clase nuevamente se hace el cálculo de datos faltantes en cantidades directamente proporcionales, con la diferencia de que para realizar el cálculo se utiliza la herramienta de ecuaciones de primer grado aplicadas a situaciones de proporcionalidad directa como las que se trabajaron en la clase 3.6 de la Unidad 5.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Encontrar el valor desconocido de una de las variables que se encuentran en una relación de proporcionalidad directa, cuando se conocen tres valores (dos de una misma variable y uno de la otra). Los estudiantes en primero y segundo ciclo de educación básica encontraban la constante, dividiendo y entre x y luego multiplicando o dividiendo el otro valor (según el dato desconocido) por la constante obtenida. El proceso anterior podría ser válido en la Ⓢ, pero se espera que los estudiantes planteen una ecuación a partir de la proporcionalidad directa entre las cantidades. Se puede formular la ecuación a partir de la aplicación de la propiedad fundamental o bien de la constante de proporcionalidad. Aunque en la Ⓒ se orienta solo a la aplicación de la propiedad fundamental, también es válido que los estudiantes lo resuelvan de la otra forma.

Solución de algunos ítems:

$8 : 56 = a : 28$
$56a = 28 \times 8$
$56a = 224$
$a = 4$

$8 : 56 = 25 : d$
$8d = 25 \times 56$
$8d = 1\,400$
$d = 175$

Fecha: **U6 3.1**

Ⓟ x y y son dos variables directamente proporcionales. Encuentra el valor de y que corresponde a $x = 6$.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
y			12						36	...

Puedes usar que
Si $\boldsymbol{a : b = c : d}$, entonces $\boldsymbol{ad = bc}$
O puedes usar la idea de constante de proporcionalidad.

Ⓢ Usando la propiedad fundamental de proporcionalidad.

$3 : 12 = 6 : d$
$3d = 12 \times 6$
$d = 24$

Usando la constante de proporcionalidad.

$\frac{12}{3} = \frac{d}{6}$
$d = \frac{12}{3} \times 6$
$d = 24$

Ⓔ

x	3	c
y	12	36

Forma 1
$3 : 12 = c : 36$
$12c = 3 \times 36$
$c = 9$

Forma 2
$\frac{12}{3} = \frac{36}{c}$
$c = \frac{3 \times 36}{12}$
$c = 9$

Ⓡ $a = 4$ $b = 63$ $c = 21$ $d = 175$

Tarea: página 139 del Cuaderno de Ejercicios.

3.2 Regla de tres simple directa con porcentaje

P

La tabla muestra el número de estudiantes y que corresponde al x%. Analiza si y es directamente proporcional a x, y en caso afirmativo, aplica la regla de tres simple directa para encontrar el número de estudiantes que corresponde al 90%.

Porcentaje (%)	10	...	50	...	90	100
No. Estudiantes	5	...	25	...	d	50

S

$\times 5$

Porcentaje (%)	10	...	50	...	90	100
No. Estudiantes	5	...	25	...	d	50

$\times 5$

Si son directamente proporcionales, entonces se aplica la regla de tres simple directa para encontrar la incógnita d.

$$10 : 5 = 90 : d$$
$$10d = 5 \times 90$$
$$d = 45$$

$$\frac{5}{10} = \frac{d}{90}$$
$$d = \frac{5 \times 90}{10}$$
$$d = 45$$

C

En situaciones que involucren porcentajes, se puede aplicar la regla de tres simple directa.

E

Encuentra el valor de la incógnita de cada caso, aplicando la regla de tres simple:

a) A una reunión donde se convocó a 125 personas, asistieron solamente el 80% de personas convocadas, ¿cuántas personas asistieron?

Porcentaje	80	100
Personas	b	125

$$80 : b = 100 : 125$$
$$100b = 80 \times 125$$
$$b = 100$$

$$\frac{b}{80} = \frac{125}{100}$$
$$b = \frac{80 \times 125}{100}$$
$$b = 100$$

b) En una escuela hay 750 estudiantes, ¿cuál es el porcentaje de niñas, si en total son 450?

Porcentaje	a	100
Personas	450	750

$$a : 450 = 100 : 750$$
$$750a = 450 \times 100$$
$$a = 60$$

$$\frac{450}{a} = \frac{750}{100}$$
$$a = \frac{450 \times 100}{750}$$
$$a = 60$$

Encuentra la cantidad desconocida en cada problema, aplicando la regla de tres simple directa.

a) En un estudio de preferencia entre mango verde y maduro, se encuestaron a 150 personas y el 60% prefiere mango verde. ¿Cuántas personas respondieron que prefieren mango verde?
90 personas

b) Un recipiente de forma cilíndrica está lleno de agua hasta 16 cm de profundidad y corresponde al 40% de la profundidad del recipiente, ¿de cuántos centímetros es la profundidad de este recipiente? 40 centímetros de profundidad

Unidad 6

135

Indicador de logro

3.2 Aplica la regla de tres simple directa para encontrar un dato desconocido en una situación de porcentaje.

Secuencia

En la clase anterior se conoció y aplicó la regla de tres simple directa para el cálculo de un dato faltante cuando hay dos cantidades directamente proporcionales. Por lo que ahora se aplicará la ley de tres simple directa en situaciones con porcentajes.

Propósito

Ⓟ Mostrar que para encontrar un valor desconocido aplicando la regla de tres simple directa en situaciones con porcentajes se puede proceder de dos formas. La primera aplicando la propiedad fundamental y la segunda a partir de la constante de proporcionalidad.

Solución de algunos ítems:

a)

Porcentaje	60	100
Personas	a	150

$60 : a = 100 : 150$
$100a = 60 \times 150$
$100a = 9\,000$
$a = 90$

90 personas prefieren el mango verde.

b)

Porcentaje	40	100
Profundidades	16	a

$40 : 16 = 100 : a$
$40a = 16 \times 100$
$40a = 1\,600$
$a = 40$

40 centímetros de profundidad.

Fecha: **U6 3.2**

Ⓟ La tabla muestra el número de estudiantes (y) que corresponde al x %. ¿Es y directamente proporcional a x?, en caso afirmativo, aplica regla de tres simple directa para encontrar el número de estudiantes que corresponde al 90 %.

Porcentaje (%)	10	...	50	...	90	100
No. estudiantes	5	...	25	...	d	50

Ⓢ

× 5

Porcentaje (%)	10	...	50	...	90	100
No. estudiantes	5	...	25	...	d	50

× 5

Sí son directamente proporcionales.

$10 : 5 = 90 : d$
$10d = 5 \times 90$
$d = 45$

$\frac{5}{10} = \frac{d}{90}$
$d = \frac{5 \times 90}{10}$
$d = 45$

Ⓔ

Porcentaje	80	100
Personas	b	125

a) $80 : b = 100 : 125$
$100b = 80 \times 125$
$b = 100$

$\frac{b}{80} = \frac{125}{100}$
$b = \frac{80 \times 125}{100}$
$b = 100$

b)

Porcentaje	a	100
Personas	450	750

$a : 450 = 100 : 750$
$750a = 450 \times 100$
$a = 60$

$\frac{450}{a} = \frac{750}{100}$
$a = \frac{450 \times 100}{750}$
$a = 60$

Ⓡ a) 90 personas.

Tarea: página 140 del Cuaderno de Ejercicios.

3.3 Regla de tres simple directa en conversión de unidades

P

Existe relación de proporcionalidad directa en conversión de medidas. Aplica la regla de tres simple directa para encontrar el valor desconocido en cada caso.

a) Peso (aproximado)

Libras	1	4
Gramos	454	d

b) Capacidad (aproximada)

Galones	1	2
Litros	b	7.58

c) Volumen

Litros	a	2
cm^3	1 000	2 000

S

En todos los casos existe una relación directamente proporcional entre las variables. Entonces, aplicando la regla de tres simple directa se tiene:

a) Peso (aproximado)

$1 : 454 = 4 : d$

$d = 4 \times 454$

$d = 1\,816$

Opcionalmente

$\frac{454}{1} = \frac{d}{4}$

$d = \frac{4 \times 454}{1}$

$d = 1\,816$

b) Capacidad (aproximada)

$1 : b = 2 : 7.58$

$2b = 7.58$

$b = 3.79$

Opcionalmente

$\frac{b}{1} = \frac{7.58}{2}$

$b = \frac{7.58}{2}$

$b = 3.79$

c) Volumen

$a : 1\,000 = 2 : 2\,000$

$2\,000a = 2 \times 1\,000$

$a = 1$

Opcionalmente

$\frac{1\,000}{a} = \frac{2\,000}{2}$

$a = \frac{2 \times 1\,000}{2\,000}$

$a = 1$

C

En situaciones de conversión de unidades se puede aplicar regla de tres simple directa, tanto en el mismo sistema métrico como entre diferentes sistemas de medidas.

1. Aplica regla de tres simple directa para encontrar el valor desconocido en cada conversión.

a) Área (aproximada)

m^2	1	5
v^2	0.7	d

$d = 3.5$

b) Longitud

m	1	c
cm	100	600

$c = 6$

c) Tiempo

Horas	1	c
Minutos	60	150

$c = 2.5$

d) Volumen

m^3	1	3
cm^3	a	3 000 000

$a = 1\,000\,000$

2. Responde lo siguiente:

a) ¿A cuántos metros por minuto equivale la velocidad 36 km por hora?
Equivale a 600 metros por minuto.

b) ¿A cuántos kilómetros por hora corresponde la velocidad de un atleta que corre 100 m en 10 segundos? Equivale a 36 kilómetros por hora.

Indicador de logro

3.3 Aplica la regla de tres simple directa para realizar la conversión entre unidades de medida.

Secuencia

En la clase anterior se aplicó la regla de tres simple directa en situaciones con porcentajes; para esta clase se aplicará para realizar conversiones de unidades en el mismo sistema métrico como en diferentes sistemas de medidas.

1. a) $1 : 0.7 = 5 : d$
$d = 5 \times 0.7$
$d = 3.5$
$3.5\ v^2$

b) $1 : 100 = c : 600$
$600 = 100c$
$6 = c$
6 m

c) $1 : 60 = c : 150$
$150 = 60c$
$\frac{5}{2} = c$
$\frac{5}{2}$ horas

d) $1 : a = 3 : 3\,000\,000$
$3\,000\,000 = 3a$
$1\,000\,000 = a$
$1\,000\,000\ cm^3$

2. a) Hay que aplicar la conversión dos veces.

km	1	36
m	1 000	a

$1 : 1\,000 = 36 : a$
$a = 36 \times 1\,000$
$a = 36\,000$

Recorre 36 000 metros en 1 hora, es decir, 60 minutos. Como: 36 000 ÷ 60 = 600; entonces se concluye que recorre 600 metros por minuto.

b)

min	1	$\frac{1}{6}$
Metros	b	100

$1 : b = \frac{1}{6} : 100$
$\frac{1}{6}b = 1 \times 100$
$b = 600$

Equivale a 600 metros por minuto, por lo tanto 600 × 60 = 36 000 metros por hora, es decir 36 km por hora.

Fecha: **U6 3.3**

Ⓟ Aplica la regla de tres simple directa para encontrar el valor desconocido en cada caso.

a) Peso

Libras	1	4
Gramos	454	d

b) Capacidad

Galones	1	2
Litros	b	7.58

c) Volumen

Litros	a	2
cm^3	1 000	2 000

Ⓢ a) Peso
$1 : 454 = 4 : d$
$d = 4 \times 454$
$d = 1\,816$
Opcionalmente
$\frac{454}{1} = \frac{d}{4}$
$d = \frac{4 \times 454}{1}$
$d = 1\,816$

b) Capacidad
$1 : b = 2 : 7.58$
$2b = 7.58$
$b = 3.79$
Opcionalmente
$\frac{b}{1} = \frac{7.58}{2}$
$b = \frac{7.58}{2}$
$b = 3.79$

c) Volumen
$a : 1\,000 = 2 : 2\,000$
$2\,000a = 2 \times 1\,000$
$a = 1$
Opcionalmente
$\frac{1\,000}{a} = \frac{2\,000}{2}$
$a = \frac{2 \times 1\,000}{2\,000}$
$a = 1$

Ⓡ 1.
a) $d = 3.5$
b) $c = 6$
c) $c = 2.5$
d) $a = 1\,000\,000$

Tarea: página 141 del Cuaderno de Ejercicios.

3.4 Practica lo aprendido

1. En una tienda hay un rótulo que dice "Hoy nosotros pagamos el IVA". Si se compra un artículo que cuesta $90.40, incluyendo el IVA que es 13%, ¿cuánto se debe pagar? Debe pagar 80 dólares

Porcentaje	100	113
Precio	b	90.40

IVA significa Impuesto al Valor Agregado. En El Salvador es del 13% y como es agregado, el precio incluyendo el IVA se expresa 113%. Como es una situación de porcentaje, se puede aplicar regla de tres simple directa.

2. En una tienda hay un rótulo que dice "El segundo artículo a mitad de precio". Si una persona desea comprar un artículo con precio de $18 y otro con precio de $14, considerando que el descuento se hace al artículo de menor precio, ¿cuánto debe pagar la persona? Debe pagar 25 dólares

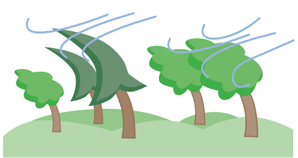
Por lo general, al artículo más barato se le dice segundo artículo. "A mitad de precio" significa que se descuenta el 50% o le toca pagar el 50% del precio.

3. Otra tienda tiene un rótulo que dice "El segundo artículo con el 20% de descuento y el tercer artículo con el 40% de descuento". Si una persona compra el primer artículo, cuyo precio es $50, el precio del segundo es $40 y del tercero es $30, ¿cuánto debe pagar? Debe pagar 100 dólares

4. En un centro escolar se reparte un boletín informativo (una hoja por estudiante). Al profesor Carlos le toca separar las hojas por grado, según el número de estudiantes, pero quiere evitar el conteo de todas ya que es bastante. ¿Cómo puede separarlas, si el peso de 12 hojas es 5 gramos?

		1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°
Boletín (hojas)	12	120	144	156	156	180	192	228	240	204
Peso (g)	5	50	60	65	65	75	80	95	100	85

5. Si un frente frío provoca vientos con velocidad de 100 kilómetros por hora, ¿a cuántos metros por segundo equivale?



Recuerda que una hora es 60 minutos, 1 minuto es 60 segundos, 1 kilómetro es 1 000 metros.

Equivale aproximadamente a 28 metros por segundo

6. La dueña de una pupusería, para asegurar la ganancia, quiere dejar el costo de los ingredientes en el 20% del precio de venta de una pupusa. Si para preparar 50 pupusas de quesillo se necesita $1.50 de harina de maíz, $1.50 de quesillo y $1.00 de aceite, ¿cuánto debe ser el precio de una pupusa con quesillo? El precio debe ser 0.40 dólares

Se considera el precio de una pupusa con quesillo como el 100%.

Unidad 6

137

Indicador de logro

3.4 Resuelve problemas correspondientes a la aplicación de la proporcionalidad.

Solución de algunos ítems:

1. $100 : b = 113 : 90.40$
$113b = 100 \times 90.40$
$113b = 9\,040$
$b = 80$
Se deben pagar 80 dólares.

4. Calculando algunos valores:

$12 : 5 = 120 : x$
$12x = 120 \times 5$
$12x = 600$
$x = 50$

$12 : 5 = 144 : x$
$12x = 144 \times 5$
$12x = 720$
$x = 60$

$12 : 5 = 180 : x$
$12x = 180 \times 5$
$12x = 900$
$x = 75$

$12 : 5 = 204 : x$
$12x = 204 \times 5$
$12x = 1\,020$
$x = 85$

5.

km	1	100
m	1000	a

$1 : 1\,000 = 100 : a$
$a = 100 \times 1\,000$
$a = 100\,000$

Recorre 100 000 metros en 1 hora, es decir, 3 600 segundos.

seg	1	3 600
m	b	100 000

$1 : b = 3\,600 : 100\,000$
$3\,600b = 100\,000 \times 1$
$3\,600b = 100\,000$
$b \approx 28$

Equivale aproximadamente a 28 metros por segundo.

6. El costo total es:
$1.50 + 1.50 + 1.00 = 4.00$
y el costo de cada pupusa:
$4 \div 50 = 0.08$

$20 : 0.08 = 100 : a$
$20b = 0.08 \times 100$
$20b = 8$
$a = 0.40$

El costo de cada pupusa debe ser 0.40 dólares.

Tarea: página 142 del Cuaderno de Ejercicios.

3.5 Aplicación de la regla de tres simple inversa

P

Una cooperativa de café piensa comprar una maquinaria pequeña para lavar el café, asumiendo cada productor la misma cantidad de dinero. Si solo son 2 productores, a cada uno le toca pagar $600. Para que el costo por productor sea $75, ¿cuántos productores deben aportar?

Productor (x)	2	...	c
Costo por productor (y)	600	...	75

S

Productor (x)	2	...	c
Costo por productor (y)	600	...	75

El costo total es xy, que es constante, por lo tanto, es una relación de proporcionalidad inversa. Entonces:

$$2 \times 600 = 75c$$
$$75c = 1200$$
$$c = 16$$

C

Cuando hay dos cantidades inversamente proporcionales, y hay dos pares de ellas (4 cantidades) con tres conocidas y una desconocida, se puede encontrar el valor de este dato usando la solución presentada. A este proceso se le llama r**egla de tres simple inversa**.

Por lo general, si se tienen los datos:

x	a	c
y	b	d

Para encontrar uno de ellos se debe hacer lo siguiente:

1. Establecer una igualdad basándose en la idea de constante: $\boldsymbol{ab = cd}$.
2. Despejar el dato desconocido.

Aplica la regla de tres simple inversa para responder las siguientes preguntas, usando la misma situación del Problema inicial.

a) Para que el costo por productor sea $50, ¿cuántos productores se deben reunir?
Deben reunirse 24 productores

b) Para que el costo por productor sea $30, ¿cuántos productores se deben reunir?
Deben reunirse 40 productores

c) Cuando se reunen 60 productores, ¿cuánto dinero le toca a cada productor?
A cada productor corresponden 20 dólares

Productor (x)	2	...	a	...	b	...	60
Costo por productor (y)	600	...	50	...	30	...	c

Indicador de logro

3.5 Utiliza la regla de tres simple inversa para determinar un dato desconocido, utilizando dos cantidades inversamente proporcionales.

Secuencia

En primero y segundo ciclo de educación básica los estudiantes trabajaron el contenido de encontrar datos faltantes en cantidades inversamente proporcionales a través de operaciones aritméticas tomando como base para el cálculo, la constante de proporcionalidad. En esta clase nuevamente se hace el cálculo de datos faltantes en cantidades inversamente proporcionales con la diferencia de que para realizar el cálculo se utiliza la herramienta de ecuaciones de primer grado aplicadas a situaciones de proporcionalidad inversa. También se establece que al procedimiento para encontrar un dato desconocido cuando hay dos cantidades inversamente proporcionales se le llama **regla de tres simple inversa**.

Propósito

Ⓟ Presentar la solución de la situación planteada. En este caso no se puede aplicar la solución que implica el uso de la propiedad fundamental de las proporciones que se presentó en la clase 3.6 de la Unidad 5 ya que en la proporción inversa no se cumple.

Solución de algunos ítems:

a) $50a = 2 \times 600$
$50a = 1\,200$
$a = 24$

b) $30b = 2 \times 600$
$30b = 1\,200$
$b = 40$

c) $60c = 2 \times 600$
$60c = 1\,200$
$c = 20$

Fecha:

U6 3.5

Ⓟ Una cooperativa de café piensa comprar una maquinaria, asumiendo cada productor la misma cantidad de dinero. Si solo son 2 productores, a cada uno le toca pagar $600. Para que el costo por productor sea $75, ¿cuántos productores deben aportar?

Ⓢ

Productor (x)	2	...	c
Costo por productor (y)	600	...	75

El costo total es xy, que es constante. Por lo tanto, es una relación de proporcionalidad inversa. Entonces:

$$2 \times 600 = 75c$$
$$75c = 1\,200$$
$$c = 16$$

Ⓡ

a) $a = 24$
b) $b = 40$
c) $c = 20$

Tarea: página 143 del Cuaderno de Ejercicios.

Unidad 7. Gráfica de faja y circular

Competencia de la Unidad

Analizar e interpretar la información de gráficas de faja y circulares presentada en diferentes medios de comunicación, para concientizar y tomar decisiones sobre asuntos de importancia e interés público.

Relación y desarrollo

Primero y segundo ciclo

- Representación de datos en tabla
- Gráfica de barras
- Pictogramas
- Gráfica de líneas
- Moda, mediana y media
- Porcentajes

Séptimo grado

Unidad 7: Gráfica de faja y circular
- Gráfica de faja
- Gráfica circular

Octavo grado

Unidad 8: Organización y análisis de datos estadísticos
- Tablas y gráficas estadísticas para variables cuantitativas
- Medidas de tendencia central
- Valor aproximado y dígitos significativos

Noveno grado

Unidad 8: Medidas de dispersión
- Dispersión
- Propiedades de la desviación típica

Plan de estudio de la Unidad

Lección	Horas	Clases
1. Gráfica de faja	1	1. Lectura de una gráfica de faja
	1	2. Construcción de una gráfica de faja
	1	3. Practica lo aprendido
2. Gráfica circular	1	1. Lectura de una gráfica circular
	1	2. Construcción de una gráfica circular
	1	3. Practica lo aprendido
	1	Prueba de la Unidad 7

6 horas clase + prueba de la Unidad 7

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Gráfica de faja
Aprovechando el hecho de que los estudiantes ya conocen el significado de un porcentaje, en esta lección se le da lectura a una gráfica de faja cuya escala está en porcentajes. Posterior a la lectura se trabaja la construcción de una gráfica de faja.

Lección 2: Gráfica circular
Para esta lección se presenta la gráfica circular como otra alternativa para la presentación de información en términos de porcentaje, a diferencia de la gráfica de faja en la gráfica circular es más difícil poder hacer comparaciones entre la información de dos gráficas. Una vez que los estudiantes pueden leer la gráfica circular, se trabaja la parte de la construcción a partir de los grados que le corresponden a cada categoría según su porcentaje. Para el cálculo de los grados se parte de la razón que hay entre los 360° grados que tiene un círculo y el 100 % que es representado por el área del círculo.

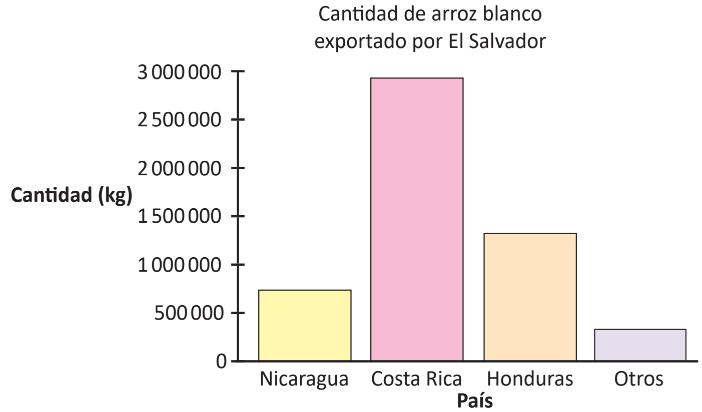
Lección 1 Gráfica de faja

1.1 Lectura de una gráfica de faja

P

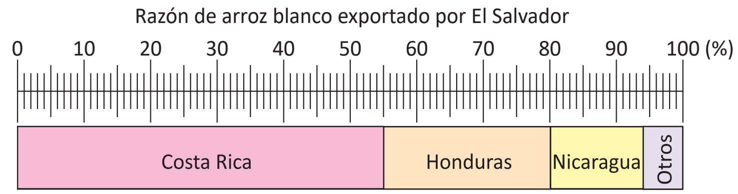
La siguiente gráfica de barras muestra la cantidad de arroz blanco exportado por El Salvador, según el país de destino.

País	Arroz (kg)
Nicaragua	744 902.2
Costa Rica	2 926 402.0
Honduras	1 330 183.0
Otros	319 243.8



Con la gráfica de barras no se puede observar la razón de la cantidad de arroz exportado a cada país de destino en relación al total.

Observa la siguiente gráfica que muestra la razón (en porcentaje) de la cantidad de arroz blanco exportado por El Salvador según el país de destino y responde lo que se te pide en cada literal.



La gráfica está dividida en 100 partes iguales, representando el por ciento de cada parte.

a) ¿Cuál es el porcentaje de exportación a cada país de destino?
b) Si la cantidad total fuera 6 000 000 kg, ¿cuántos kg se exportarían a cada país?

S

a) Costa Rica: 55%, Honduras: 25%, Nicaragua: 14% y Otros: 6%.

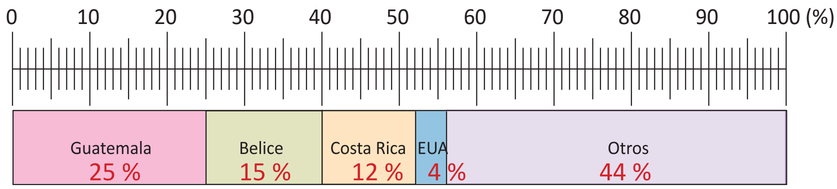
b) Costa Rica: $6\,000\,000 \times \frac{55}{100} = 3\,300\,000$; Honduras: $6\,000\,000 \times \frac{25}{100} = 1\,500\,000$;
Nicaragua: $6\,000\,000 \times \frac{14}{100} = 840\,000$ y Otros: $6\,000\,000 \times \frac{6}{100} = 360\,000$.

C

Generalmente cada parte que compone la gráfica se llama categoría. En el ejemplo anterior, cada parte correspondiente a "Costa Rica", "Honduras", "Nicaragua" y "Otros" son las categorías. A la gráfica se le llama **gráfica de faja**, en ella se observa fácilmente la razón de cada categoría en relación al total, esta presenta las siguientes características:

1. Tiene un título.
2. Las categorías se ubican de mayor a menor, según su porcentaje (de izquierda a derecha).
3. En caso de que aparezca la categoría "Otros", se ubica por último sin importar su porcentaje.

1. La gráfica de faja muestra la exportación de arroz precocido de El Salvador en enero del año 2014.

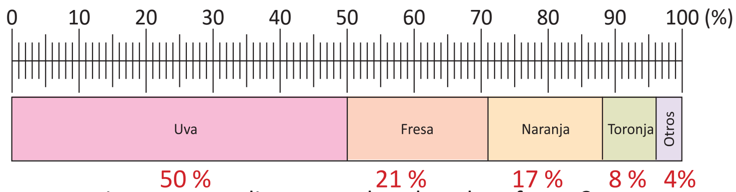


a) ¿Cuál es el porcentaje de exportación a cada país?

b) Si la cantidad total es 2 356 191 kg, ¿cuántos kg se exportan a cada país?

Guatemala: 589 048 kg, Belice: 353 429 kg, Costa Rica: 282 743 kg, EUA: 94 248 kg, Otros: 1 036 723 kg

2. Se pregunta a varias personas sobre su sabor de refresco favorito, obteniéndose los siguientes resultados:

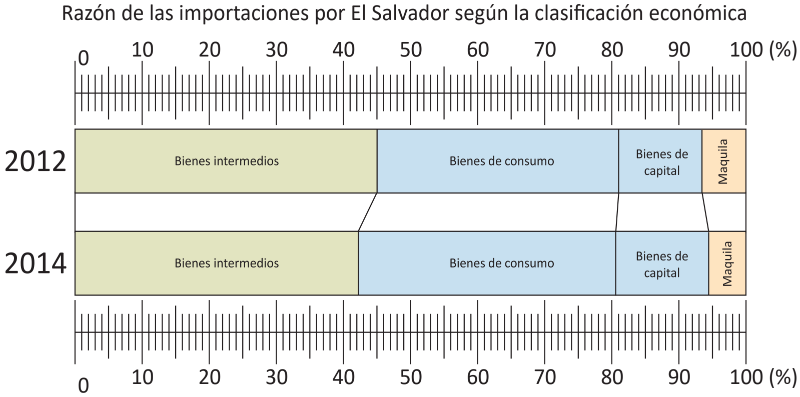


a) ¿Cuál es el porcentaje correspondiente a cada sabor de refresco?

b) Si la cantidad de personas es de 200, ¿cuántas personas han preferido cada sabor de refresco?

Uva: 100, fresa: 42, naranja: 34, toronja: 16, otros: 8

3. Las siguientes gráficas de faja muestran las importaciones realizadas por El Salvador, según la clasificación económica, en los años 2012 y 2014:



Los bienes de consumo son los que satisfacen directamente las necesidades de los individuos, como el alimento y la ropa.

Los bienes intermedios se utilizan para realizar la producción en las empresas y el gobierno. Son los insumos o materias primas que serán objeto de posteriores transformaciones en el proceso de producción.

Los bienes de capital son los que se usan para transformar los bienes intermedios, pero que no sufren transformación en el proceso productivo; por ejemplo, la maquinaria, las herramientas e instrumentos de alta tecnología.

a) ¿Cuál es el porcentaje de los **Bienes de consumo** en cada año? ¿En qué año hubo un mayor porcentaje de importación de este tipo de bienes?

2012: 36 %, 2014: 39 %, mayor: 2014

b) ¿Cuál es el porcentaje de los **Bienes de capital** en cada año? ¿En qué año hubo un mayor porcentaje de importación de este tipo de bienes?

2012: 12 %, 2014: 14 %, mayor: 2014

c) ¿En qué año hubo un menor porcentaje de importación de **Bienes intermedios**?

Mayor: 2012

Indicador de logro

1.1 Lee la información presentada en una gráfica de faja.

Secuencia

Ⓟ Practicar lo desarrollado en clases. El ejercicio 3 de esta sección tiene una variante respecto a los desarrollados previamente, puesto que se hace la comparación entre dos gráficas de faja que representan la información de años diferentes; a pesar de esa diferencia la lectura de la información en cada una de las gráficas se hace de igual manera. Al comenzar con esta parte de la clase es conveniente mencionar que otra ventaja de la gráfica de faja es que permite hacer comparaciones entre dos de ellas de manera más sencilla.

Solución de algunos ítems:

1. a) Guatemala: 25 %
   Belice: 15 %
   Costa Rica: 12 %
   EUA: 4 %
   Otros: 44 %

   b) Calculando algunos valores:
   Guatemala:
   $2\,356\,191 \times \frac{25}{100} \approx 589\,048$
   Otros:
   $2\,356\,191 \times \frac{44}{100} \approx 1\,036\,724$
   Belice:
   $2\,356\,191 \times \frac{15}{100} \approx 353\,429$
   EUA:
   $2\,356\,191 \times \frac{4}{100} \approx 94\,248$

2. a) Uva: 50 %
   Fresa: 21 %
   Naranja: 17 %
   Toronja: 8 %
   Otros: 4 %

   b) Uva: 100 (50 : a = 100 : 200)
   Fresa: 42 (21 : a = 100 : 200)
   Naranja: 34 (17 : a = 100 : 200)
   Toronja: 16 (8 : a = 100 : 200)
   Otros: 8 (4 : a = 100 : 200)

3. a) 2012: 36 %
   2014: 39 %
   Mayor: 2014

   b) 2012: 12 %
   2014: 14 %
   Mayor: 2014

   c) Mayor: 2012

Fecha: **U7 1.1**

Ⓟ Observa la gráfica en el libro de texto y responde:

a) ¿Cuál es el porcentaje a cada país?
b) Si el total es 6 000 000 kg, ¿cuántos kg son para cada país?

Ⓢ a) Costa Rica: 55 % Honduras: 25 %
Nicaragua: 14 % Otros: 6 %.

b) Costa Rica: 3 300 000; $6\,000\,000 \times \frac{55}{100}$
Honduras: 1 500 000; $6\,000\,000 \times \frac{25}{100}$
Nicaragua: 840 000 ; $6\,000\,000 \times \frac{14}{100}$
Otros: 360 000. $6\,000\,000 \times \frac{6}{100}$

Ⓡ
1.
a) Guatemala: 25 %, Belice: 15 %, Costa Rica: 12 %, EUA: 4 % y Otros: 44 %

b) Guatemala: 589 048 kg
Belice: 353 429 kg
Costa Rica: 282 743 kg
EUA: 94 248 kg
Otros: 1 036 723 kg

Tarea: página 148 del Cuaderno de Ejercicios.

1.2 Construcción de una gráfica de faja

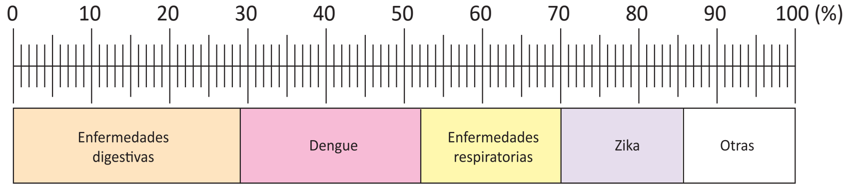
P

La tabla muestra el número de pacientes según la enfermedad. Construye una gráfica de faja, redondeando el porcentaje de cada categoría a la unidad.

Enfermedad	Número de pacientes	%
Dengue	420	23.3
Zika	280	15.6
Enfermedades digestivas	530	29.4
Enfermedades respiratorias	330	18.3
Otras	240	13.3
Total	1 800	100

S

Razón de la cantidad de pacientes según enfermedad



C

El procedimiento para la elaboración de una gráfica de faja es:

1. Encontrar el porcentaje de cada categoría.
2. Separar según el porcentaje obtenido, partiendo de la categoría con mayor porcentaje desde la izquierda.
3. Colocar la categoría “Otros” en último lugar (en caso de que aparezca).

E

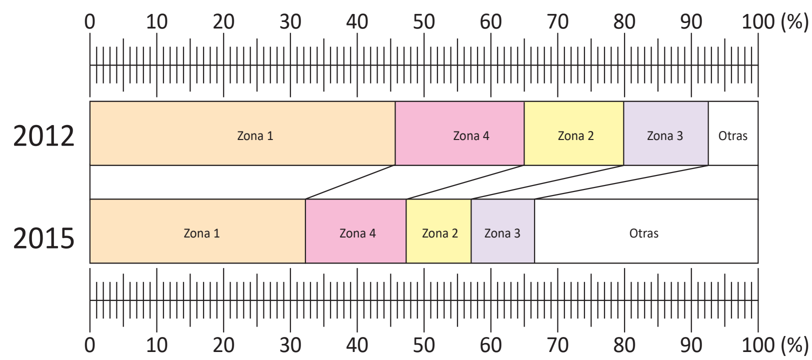
La siguiente tabla muestra la cantidad de habitantes de distintas zonas de una población en el año 2012 y 2015. Construye una gráfica de faja redondeando el porcentaje de cada categoría hasta la unidad.

	2012		2015	
Zona	Número de habitantes	%	Número de habitantes	%
Zona 1	1 567 156	45.6	1 725 520	31.6
Zona 2	523 655	15.2	524 130	9.5
Zona 3	434 003	12.6	512 000	9.3
Zona 4	660 652	19.2	800 713	14.6
Otras	250 001	7.2	1 900 335	34.7
Total	3 435 467		5 462 698	100

Si el total de los porcentajes no es 100, por causa del redondeo, entonces se arregla cambiando el por ciento de la categoría “Otros” o la categoría que tiene mayor cantidad, de modo que el total sea 100.

Solución.

Razón de la cantidad de habitantes por zona



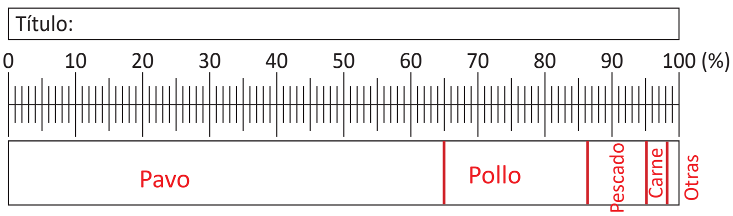
Lección 1

1. Por motivos de la celebración del día del niño, en un centro escolar, se les preguntó a los estudiantes qué comida preferían. En la tabla aparecen los resultados.

Categoría	Cantidad	%
Pollo	83	21
Carne	10	3
Pescado	37	9
Pavo	257	65
Otras	8	2
Total	395	100

a) ¿Qué porcentaje representa el número de niños que prefieren cada uno de los tipos de comida? (Redondea el porcentaje de cada categoría a la unidad).

b) Construye una gráfica de faja para representar la información.

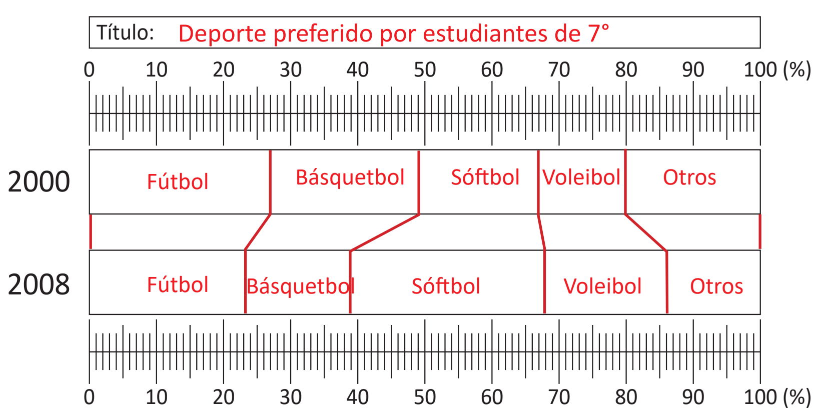


2. Se preguntó a estudiantes de 7° grado de una escuela en el año 2000 y 2008 sobre el deporte de su preferencia. Las respuestas se registraron en la siguiente tabla:

Deportes	2000		2008	
	Niños (Datos)	%	Niños (Datos)	%
Fútbol	47	27	42	23
Básquetbol	38	22	28	16
Softbol	31	18	53	29
Voleibol	22	13	33	18
Otros	35	20	24	14
Total	173	100	180	100

a) ¿Qué porcentaje representa el número de estudiantes que prefieren cada deporte en los años que se les preguntó? (Redondea el porcentaje de cada categoría a la unidad).

b) Construye una gráfica de faja para cada año y compara la información presentada en ellas. ¿Es menor, igual o mayor cada uno de los porcentajes del año 2000 con respecto al 2008?



Indicador de logro

1.2 Construye una gráfica de faja para representar la información de una tabla.

Secuencia

En esta clase se determina la ecuación que representa a una relación de proporcionalidad directa entre dos variables x y y, a partir de un par de valores para las variables.

Propósito

Ⓟ Construir dos gráficas de faja para realizar la comparación de la información contenida en ellas. En este punto es importante hacer referencia que en ocasiones el total de los porcentajes no es 100, por lo que es necesario ajustar el porcentaje respectivo a la categoría "Otros" o a la categoría con más porcentaje de manera que la suma de los porcentajes sea 100. Por lo difícil de hacer la escala de las gráficas tanto en la Ⓢ como en el Ⓔ, se omiten las gráficas en la pizarra. Al igual que en la clase anterior, se indica que observen las gráficas en el libro de texto.

Solución de algunos ítems:

1. a) $83 \div 395 \times 100 \approx 21$

$10 \div 395 \times 100 \approx 3$

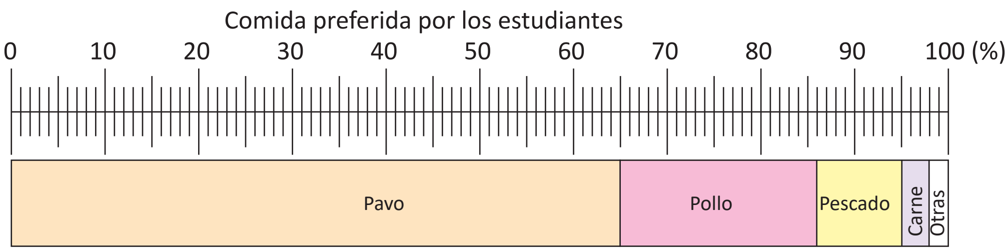
$37 \div 395 \times 100 \approx 9$

$257 \div 395 \times 100 \approx 65$

$8 \div 395 \times 100 \approx 2$

Después de redondear el porcentaje de cada categoría, modificar el porcentaje de "Otros" de modo que la suma de los porcentajes sea 100.
Otra manera es ajustar el mayor porcentaje (en este caso es la categoría de sóftbol en el 2008).

1. b)



Fecha: **U7 1.2**

Ⓟ Construye una gráfica de faja para la tabla (redondeando el porcentaje de cada categoría a la unidad).

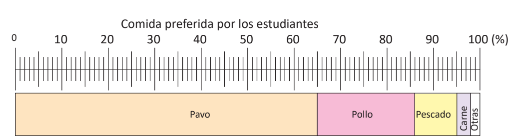
Enfermedad	Número de pacientes	%
Dengue	420	23.3
Zika	280	15.6
Enfermedades digestivas	530	29.4
Enfermedades respiratorias	330	18.3
Otras	240	13.3
Total	1 800	100

Ⓢ Comparar la gráfica realizada con la del libro de texto.

Ⓔ Se pueden utilizar gráficas de faja para hacer comparaciones de una medición en distintos años, grupos, etc. Como ejemplo se puede observar la presentada en el libro de texto.

Ⓡ 1. a) Pollo: 21 %, carne: 3 %, pescado: 9 %, pavo: 65 % y otras: 2 %

b)

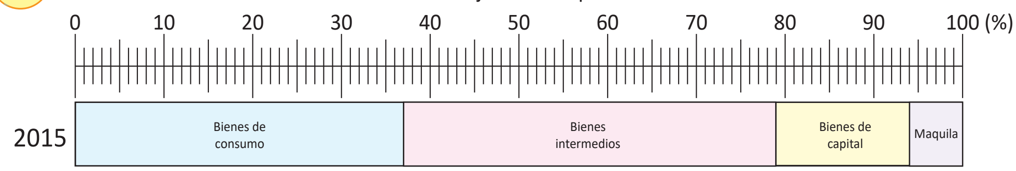


Tarea: página 150 del Cuaderno de Ejercicios.

1.3 Practica lo aprendido

Realiza lo que se te pide en cada uno de los siguientes numerales:

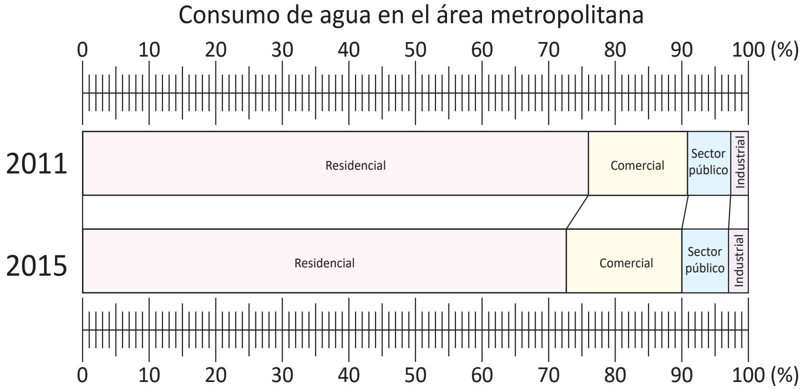
1. La siguiente gráfica muestra el porcentaje de las importaciones, según clasificación económica realizadas por El Salvador, en el año 2015.



a) ¿Cuál es el porcentaje correspondiente a cada tipo de importación?
Bienes de consumo: 37 %, bienes intermedios: 42 %, bienes de capital: 15 % y maquila: 6 %

b) Si la cantidad total de dólares de las importaciones fué 10 415.4 millones, ¿cuál es la cantidad por cada tipo de importación? Bienes de consumo: 3,854 millones, bienes intermedios: 4,374 millones, bienes de capital: 1,562 millones y maquila: 625 millones.

2. La siguiente gráfica presenta el porcentaje de consumo de agua por categorías en la región metropolitana de San Salvador en sistemas administrados por ANDA, en los años 2011 y 2015.



a) ¿Cuál es el porcentaje de consumo del sector **Residencial** en cada año? ¿En qué año hubo un mayor porcentaje de consumo?
2011: 76 %, 2015: 73 % y el mayor porcentaje fue en 2011.

b) ¿Cuál es el porcentaje de consumo del sector **Industrial** en cada año? ¿En qué año hubo un mayor porcentaje de consumo?
2011: 2 %, 2015: 3 % y el mayor porcentaje fue en 2015.

c) ¿En qué año hubo un menor porcentaje de consumo del sector **Comercial**?
El sector comercial tuvo menor porcentaje en 2011.

d) ¿Se puede decir que el consumo total de agua por categoría **Residencial** de la región metropolitana de San Salvador en 2015 ha disminuido comparado con el 2011?
d) No es posible, el porcentaje es menor, pero no se conoce cuál fue el consumo total.

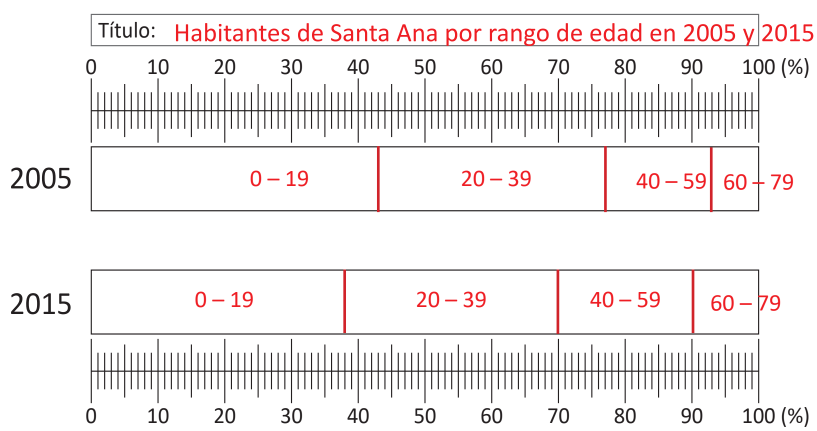
3. Las siguiente tabla presenta el número de personas en el departamento de Santa Ana, según su rango de edad, en los años 2005 y 2015.

Edades	2005	2015
0 – 19	259 278	220 443
20 – 39	202 899	182 631
40 – 59	94 723	113 041
60 – 79	44 174	54 557
Totales	601 074	570 672

a) ¿Qué porcentaje representa el número de personas en cada uno de los rangos de edad? (Redondea el porcentaje de cada categoría a la unidad)

Edades	2005(%)	2015(%)
0 – 19	43	38
20 – 39	34	32
40 – 59	16	20
60 – 79	7	10
Totales	100	100

b) Construye una gráfica de faja para representar la información.



c) ¿Qué interpretación obtienes de la gráfica? Explica.
El porcentaje de personas de 20 años o más aumentó.

Indicador de logro

1.3 Resuelve problemas correspondientes a la gráfica de faja.

Solución de algunos ítems:

1. a) Bienes de consumo: 37 %
   Bienes intermedios: 42 %
   Bienes de capital: 15 %
   Maquila: 6 %

   b) Bienes de consumo:
   $10\,415.4 \times \frac{37}{100} \approx 3{,}854$

   Bienes intermedios:
   $10\,415.4 \times \frac{42}{100} \approx 4{,}374$

   Bienes de capital:
   $10\,415.4 \times \frac{15}{100} \approx 1{,}562$

   Maquila:
   $10\,415.4 \times \frac{6}{100} \approx 625$

   Bienes de consumo: 3,854 millones.
   Bienes intermedios: 4,374 millones.
   Bienes de capital: 1,562 millones.
   Maquila: 625 millones.

2. a) Residencial:
   2011: 76 %
   2015: 73 %
   El mayor porcentaje fue en 2011.

   b) Industrial:
   2011: 2 %
   2015: 3 %
   El mayor porcentaje fue en 2015.

   c) El sector comercial tuvo menor porcentaje en 2015.

   d) No es posible, el porcentaje es menor, pero no se conoce cuál fue el consumo total.

3.
a) 2005
   0 – 19:
   $259\,278 \div 601\,074 \times 100 \approx 43$

   20 – 39:
   $202\,443 \div 601\,074 \times 100 \approx 34$

   40 – 59:
   $94\,723 \div 601\,074 \times 100 \approx 16$

   60 – 79:
   $44\,174 \div 601\,074 \times 100 \approx 7$

b) 2015
   0 – 19:
   $220\,443 \div 570\,672 \times 100 \approx 39$

   20 – 39:
   $182\,631 \div 570\,672 \times 100 \approx 32$

   40 – 59:
   $113\,041 \div 570\,672 \times 100 \approx 20$

   60 – 79:
   $54\,557 \div 570\,672 \times 100 \approx 10$

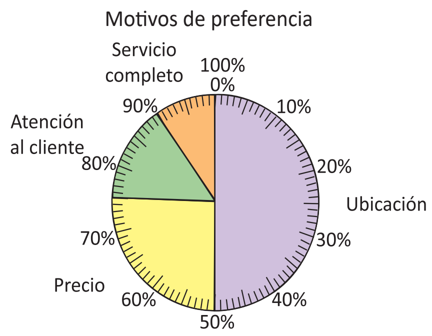
El total es 101. Por lo tanto, se modifica el mayor porcentaje. Por lo que hay que cambiar de 39 a 38.

Tarea: página 152 del Cuaderno de Ejercicios.

2.1 Lectura de una gráfica circular

P

En una gasolinera se pregunta a los clientes el motivo de su preferencia y se obtuvo la información representada en la siguiente gráfica:



El número de personas que eligieron un motivo por el que prefieren la gasolinera es proporcional al área del sector circular correspondiente a ese motivo.

a) ¿Cuál es el motivo por el que la mayoría de los clientes entrevistados prefieren esta gasolinera? ¿De cuánto es el porcentaje?

b) ¿Cuál es el motivo por el que menos prefieren los clientes esta gasolinera? ¿De cuánto es el porcentaje?

S

a) Por la ubicación, 50%

b) Por el servicio completo, 10%

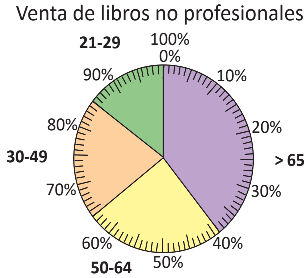
Al igual que en la gráfica de faja, una categoría es cada una de las partes del gráfico (sectores circulares), en este ejemplo particular, cada categoría es un motivo que el cliente podía elegir cuando se le hizo la pregunta.

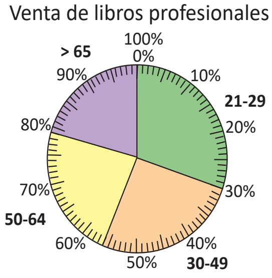
C

A la gráfica que representa el total con un círculo y que está dividida por radios, según la razón de cada categoría al total (porcentaje) se le llama **Gráfica circular**.

E

En una venta de libros, un día se preguntó a personas de distintas edades, ¿qué tipo de libro habían comprado? Estos se clasificaron como "libros profesionales" o "no profesionales". La información obtenida se presenta en las siguientes gráficas circulares (las categorías son los rangos de edades de los entrevistados).





a) ¿Qué rango de edad tienen las personas que más compraron libros no profesionales? ¿De cuánto es el porcentaje?

b) ¿Qué rango de edad tienen las personas que más compraron libros profesionales? ¿De cuánto es el porcentaje?

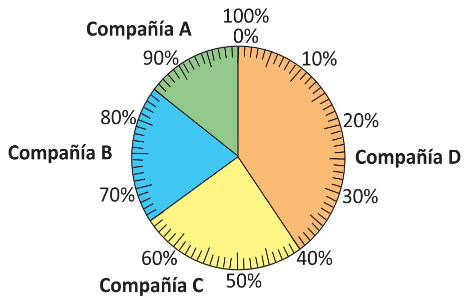
Solución.

a) mayor de 65 años, 39%

b) 21 - 29 años, 30%

1. En un centro comercial se pregunta a los usuarios de telefonía celular qué compañía utilizan. La información se presenta en la siguiente gráfica:

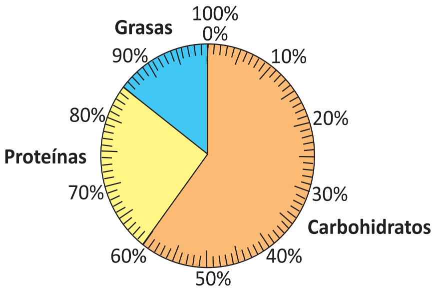
Compañías telefónicas



a) ¿Cuál es el porcentaje de las personas que utilizan la compañía B? 20 %
b) ¿Qué compañía es la menos utilizada? ¿Qué porcentaje tiene? Compañía A, 15 %
c) ¿Cuál es la compañía que tiene mayor demanda? ¿Qué porcentaje tiene? Compañía D, 40 %
d) Si el total de personas encuestadas fue 200, ¿qué cantidad de personas prefieren cada una de las compañías? A: 30 personas, B: 40 personas
C: 50 personas y D: 80 personas

2. El porcentaje del consumo de carbohidratos, proteínas y grasas, depende del tipo de dieta que se hace, tal como se presenta en la siguiente gráfica:

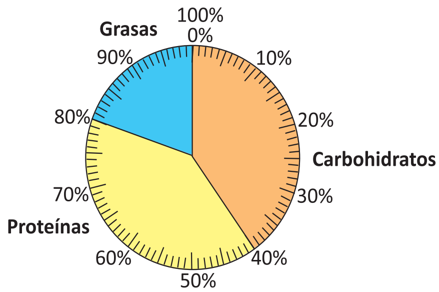
Dieta saludable para atletas



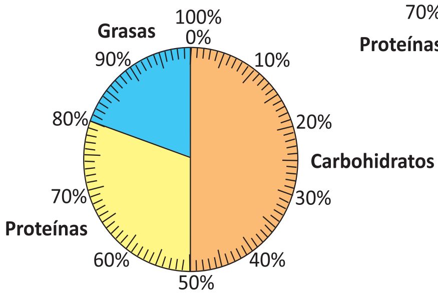
Se tiene conocimiento que el primer gráfico circular fue elaborado y utilizado por el ingeniero y economista escocés William Playfair que mostraba las proporciones del imperio turco localizado en Asia, Europa y África hacia el año 1786.

Playfair, W. (1801). *The statistical Breviary.*

Dieta saludable



Dieta promedio



a) ¿Cuál es el porcentaje de proteínas que debe consumir un atleta? 25 %
b) ¿Cuál es el porcentaje de grasa que consume una persona que tiene una dieta promedio? 20 %
c) Según tu alimentación, ¿cuál es el porcentaje de carbohidratos que consumes según tu tipo de dieta? El estudiante debe elegir según considere su dieta, por ejemplo al ser una dieta promedio los carbohidratos tienen 50 %

Indicador de logro

2.1 Construye una gráfica circular a partir de una tabla.

Secuencia

Para esta clase se introduce la gráfica circular como una alternativa a la anterior. Al igual que en la gráfica de faja, en la gráfica circular la lectura se hace en términos de porcentaje.

Propósito

Ⓟ Determinar intuitivamente el porcentaje correspondiente a una categoría de una gráfica circular. La gráfica se ha dividido en 100 partes donde cada una de ellas representa el 1 % de todo el círculo, para que el estudiante directamente pueda contar y así determinar el porcentaje de una categoría. Debido a la dificultad para hacer la escala de las gráficas tanto en la Ⓢ como en el Ⓔ, se omiten las gráficas en la pizarra. La indicación será igual que en las clases 1.1 y 1.2 (observar las gráficas en el libro de texto).

Solución de algunos ítems:

1. a) 20 %
   b) Compañía A, 15 %
   c) Compañía D, 40 %
   d) Calculando algunos valores:

Compañía A:
$200 \times \frac{15}{100} = 30$

Compañía B:
$200 \times \frac{20}{100} = 40$

Compañía C:
$200 \times \frac{25}{100} = 50$

Compañía D:
$200 \times \frac{40}{100} = 80$

Compañía A: 30 personas,
Compañía B: 40 personas,
Compañía C: 50 personas,
Compañía D: 80 personas.

Fecha: **U7 2.1**

Ⓟ La gráfica en el libro de texto presenta la información obtenida de la pregunta realizada a los clientes de una gasolinera. La pregunta es: ¿Cuál es el motivo de su preferencia por esta gasolinera?
De la gráfica responde:
a) ¿Por cuál motivo la mayoría de los entrevistados eligen la gasolinera? ¿De cuánto es el porcentaje?
b) ¿Cuál motivo fue el menos mencionado por los entrevistados? ¿De cuánto es el porcentaje?

Ⓢ a) Por la ubicación, 50 %
b) Por el servicio completo, 10 %

Ⓔ De las dos gráficas del libro de texto se observa que
a) En la gráfica de la venta de libros no profesionales el grupo mayoritario de clientes pertenece al rango “mayor de 65 años”, que corresponde al 39 %.
b) En la gráfica de la venta de libros profesionales el grupo mayoritario de clientes pertenece al rango de 21 - 29 años, que corresponde al 30 %.

Ⓡ 1. a) 20 %
b) Compañía A, 15 %
c) Compañía D, 40 %
d) A: 30, B: 40, C: 50 y D: 80

Tarea: página 153 del Cuaderno de Ejercicios.

2.2 Construcción de una gráfica circular

P

La siguiente tabla muestra la cantidad de verduras disponibles en una tienda. Piensa cómo representar los datos.

Verdura	Cantidad	%	Grados
Tomate	90	45	
Cebolla	30	15	
Pepino	60	30	
Otras	20	10	
Total	200	100	

a) Dado que el ángulo central del círculo entero (100%) es 360°, ¿cuál es la medida del ángulo para 1%?

b) ¿Cuánto debe medir el ángulo para 45%, 15%, 30% y 10%?

S

a) 360 ÷ 100 = 3.6

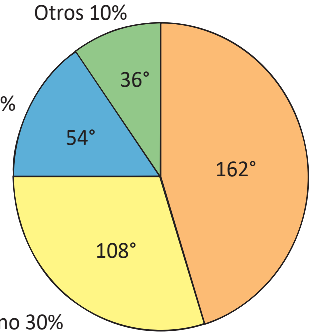
b) Multiplica 3.6 por el porcentaje:

3.6 × 45 = 162　　3.6 × 15 = 54　　3.6 × 30 = 108　　3.6 × 10 = 36

Por lo que los grados según categoría quedan distribuidos de la siguiente manera:
Tomates: 162°, cebolla: 54°, pepino: 108°, otras: 36°.

Verdura	Cantidad	%	Grados
Tomate	90	45	162°
Cebolla	30	15	54°
Pepino	60	30	108°
Otras	20	10	36°
Total	200	100	360°

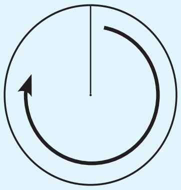
Distribución de la cantidad de verduras



C

El procedimiento para representar la información en una gráfica circular es el siguiente:

1. Encontrar el porcentaje de cada categoría.
2. Encontrar el ángulo central de cada categoría (3.6 × porcentaje).
3. Colocar las categorías, desde la mayor a la menor, en sentido horario y teniendo en cuenta que cuando aparezca la categoría "Otros" siempre estará al final.

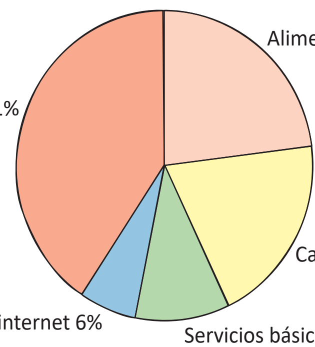


De mayor a menor

E

Suponiendo que la distribución del ingreso mensual de una familia es constante (no cambia de mes a mes), en la gráfica circular se muestra la distribución de los gastos del hogar:

a) Si el ingreso mensual de dinero de una familia es de $450 y se distribuye como se presenta en la gráfica, ¿cuánto dinero se destina para cada tipo de gasto?
b) Si se destinaran $100 para el pago de la casa, ¿de cuánto sería el ingreso mensual de dinero?
c) ¿Cuántos grados corresponden al gasto de alimentación?



Solución.

a) Teléfono e internet:
(450 ÷ 100) × 6 = 27
R. $27

Con igual procedimiento se calcula que
Servicios básicos: $45
Casa: $90
Alimentación: $103.5
Otros: $184.5

b) El ingreso mensual de dinero sería:

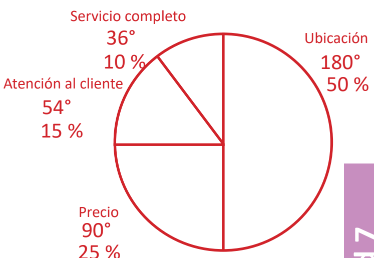
(100 ÷ 20) × 100 = 500
R. $500

c) (3.6 × 23) = 82.8

Se aproxima hasta las cifras de las unidades por lo que son 83°.
R. 83°

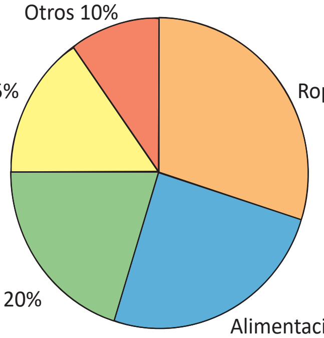
1. Retomando el problema de la clase anterior, en tu cuaderno, haz la tabla y dibuja la gráfica:

Motivos de preferencia	Cantidad de personas	%	Grados
Servicio completo	50	10	36
Atención al cliente	75	15	54
Precio	125	25	90
Ubicación	250	50	180
Total	500	100	360



2. Si una persona distribuye su sueldo en el mes como se presenta en la siguiente gráfica, responde:

a) Su sueldo mensual es de $250, ¿cuánto dinero se destina para cada área?
b) Si se quiere destinar $50 para transporte manteniendo los porcentajes, ¿de cuánto debería ser el sueldo mensual?
c) ¿Cuántos grados corresponden al sector circular que representa al gasto de ropa?



a) Ropa: 75 dólares
Alimentación: 62.5 dólares
Ahorro: 50 dólares
Transporte: 37.5 dólares
Otros: 25 dólares

b) De 333.33 dólares
c) Corresponden 75°

Unidad 7

149

Indicador de logro

2.2 Construye una gráfica circular a partir de una tabla.

Secuencia

Anteriormente se estudió la lectura de una gráfica circular, por lo que en esta clase se muestra la forma de construirla. Para la construcción de la gráfica circular se utiliza la regla de tres simple directa que fue trabajada en la última lección de la unidad anterior..

Propósito

Determinar el número de grados del círculo correspondientes a cierto porcentaje. En este punto se espera que los estudiantes utilicen la regla de tres simple directa para dar respuestas a las preguntas planteadas.

1.

Porcentajes:

Servicio completo:
$50 \div 500 \times 100 = 10$

Atención al cliente:
$75 \div 500 \times 100 = 15$

Precio:
$125 \div 500 \times 100 = 25$

Ubicación:
$250 \div 500 \times 100 = 50$

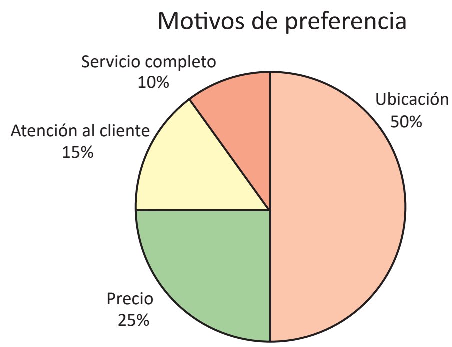
Grados:

Servicio completo:
$3.6 \times 10 = 36$

Atención al cliente:
$3.6 \times 15 = 54$

Precio:
$3.6 \times 25 = 90$

Ubicación:
$3.6 \times 50 = 180$



Fecha: **U7 2.2**

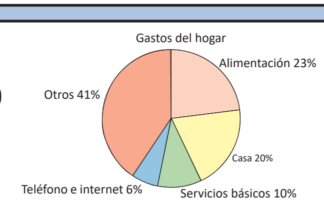
Ⓟ La tabla muestra la cantidad de verduras disponibles en una tienda. Llena la columna de "Grados".

Verdura	Cantidad	%	Grados
Tomate	90	45	
Cebolla	30	15	
Pepino	60	30	
Otras	20	10	
Total	200	100	

Ⓢ a) $360 \div 100 = 3.6$

b) Multiplica 3.6 por el porcentaje:
$3.6 \times 45 = 162$ $3.6 \times 15 = 54$
$3.6 \times 30 = 108$ $3.6 \times 10 = 36$
Por tanto:
tomate: 162°, cebolla: 54°, pepino: 108°, otras: 36°.

Ⓔ Ingreso mensual: \$450



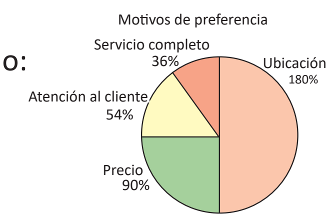
a) Teléfono e internet:
$(450 \div 100) \times 6 = 27$
servicios básicos: \$45
casa: \$90
alimentación: \$103.5
otros: \$184.5

b) Para destinar \$100 al pago de casa, el ingreso mensual de dinero sería:
$(100 \div 20) \times 100 = 500$

c) Al gasto de alimentación le corresponden $(3.6 \times 23) = 82.8$, aproximado 83°.

Ⓡ 1. Porcentaje: Grado:

Porcentaje	Grado
10	36
15	54
25	90
50	180
100	360



Tarea: página 155 del Cuaderno de Ejercicios.

2.3 Practica lo aprendido

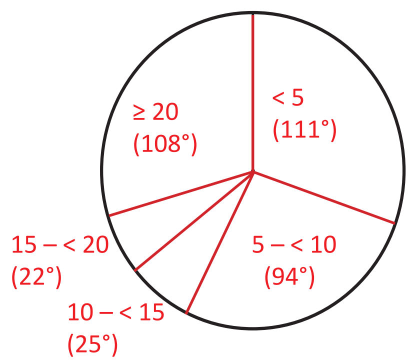
1. La siguiente tabla presenta el número de empleados del personal permanente según tiempo de servicio (en años) de una institución:

Tiempo de servicio (años)	Número de empleados	%	Grados
< 5	1281	31	111
5 – 10	1108	26	94
10 – 15	296	7	25
15 – 20	273	6	22
≥ 20	1254	30	108
Total	4212	100	360

a) Calcula el porcentaje y grados correspondientes a cada categoría (aproxima hasta las cifras de las unidades).

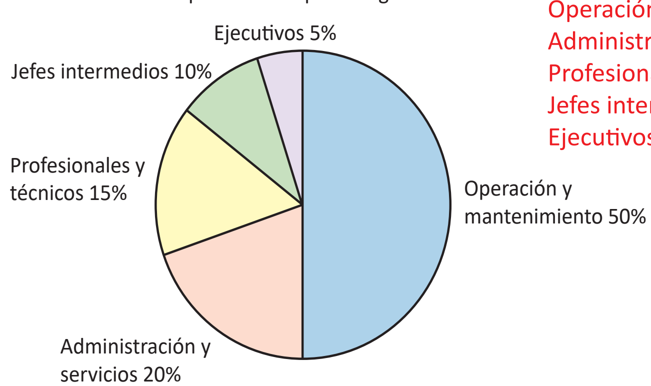
b) Con la información de la tabla, construye una gráfica circular.

Porcentaje del total de empleados según tiempo de servicio



2. En una institución, el personal permanente por categoría laboral, se distribuye tal como se presenta en la siguiente gráfica circular:

Personal permanente por categoría laboral



Operación y mantenimiento: 2 100
Administración y servicios: 840
Profesionales y técnicos: 630
Jefes intermedios: 420
Ejecutivos: 210

a) Si el número de empleados es de 4 200, ¿cuántos empleados hay en cada categoría laboral?

b) Si se quieren 30 ejecutivos manteniendo los porcentajes, ¿de cuánto debería ser el número de empleados de la institución? 600

c) ¿Cuántos grados corresponden al sector circular que representa a los **profesionales y técnicos**?
54

Indicador de logro

2.3 Resuelve problemas correspondientes a la gráfica circular.

Resolución del primer ítem.

1.
Porcentajes:

$$< 5: 1\,281 \div 4\,212 \times 100 \approx 30$$

$$5 - 10: 1\,108 \div 4\,212 \times 100 \approx 26$$

$$10 - 15: 296 \div 4\,212 \times 100 \approx 7$$

$$15 - 20: 273 \div 4\,212 \times 100 \approx 6$$

$$\geq 20: 1\,254 \div 4\,212 \times 100 \approx 30$$

Para que el total sea 100, se ajusta la categoría que tiene el mayor porcentaje, que es < 5 o ≥ 20. Como el número que corresponde a < 5 es el más grande sin aproximar se ajusta esta categoría.

$$< 5: 30\ \% \longrightarrow 31\ \%$$

Grados:

$$< 5: 3.6 \times 31 \approx 112$$
$$5 - 10: 3.6 \times 26 \approx 94$$
$$10 - 15: 3.6 \times 7 \approx 25$$
$$15 - 20: 3.6 \times 6 \approx 22$$
$$\geq 20: 3.6 \times 30 \approx 108$$

Para que el total sea 360° se hace el mismo tipo de ajuste anterior.

$$< 5: 112\ \% \longrightarrow 111\ \%$$

Observación:

Se puede calcular el grado nuevamente sin utilizar el porcentaje.
Por ejemplo: <5: $360 \times \frac{1\,281}{4\,212}$

Por las aproximaciones y ajustes realizados anteriormente, este cálculo puede diferir un poco respecto al cálculo utilizando el porcentaje.

Tarea: página 158 del Cuaderno de Ejercicios.

Unidad 8. Figuras planas y construcción de cuerpos geométricos

Competencias de la Unidad

– Utilizar los instrumentos de geometría para hacer traslación, reflexión y rotación de figuras planas.
– Aplicar las características de los círculos que se intersecan para determinar la mediatriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo.
– Aplicar la regla de tres simple directa para calcular la longitud de arco y el área de un segmento circular.
– Desarrollar el plano de un prisma, pirámide y cilindro para calcular su área total.

Relación y desarrollo

Primero y segundo ciclo

- Construcción de ángulos usando el transportador
- Clasificación y construcción de triángulos
- Clasificación y construcción de cuadriláteros
- Clasificación de cuerpos geométricos
- Figuras simétricas
- Perímetro y área de triángulos y cuadriláteros
- Patrones de cubos y prismas rectangulares y triangulares
- Longitud de la circunferencia y área del círculo
- Longitud y área de sectores circulares notables
- Volumen del prisma
- Traslaciones, giros y simetría rotacional

Séptimo grado

Unidad 8: Figuras planas y construcción de cuerpos geométricos
- Movimiento de figuras en el plano
- Círculos, segmentos y ángulos
- Planos, cuerpos geométricos, área total del prisma, pirámide y cilindro

Octavo grado

Unidad 4: Paralelismo y ángulos de un polígono
- Suma de los ángulos internos y externos de un polígono
- Rectas paralelas y ángulos

Unidad 5: Criterios de congruencia de triángulos
- Congruencia de triángulos

Unidad 6: Características de los triángulos y cuadriláteros
- Triángulos
- Paralelogramos

Unidad 7: Área y volumen de sólidos geométricos
- Características y elementos de los sólidos geométricos
- Cálculo del volumen de sólidos geométricos
- Aplicaciones de volúmenes
- Áreas de sólidos geométricos
- Aplicaciones de áreas

Noveno grado

Unidad 5: Figuras semejantes
- Semejanza
- Semejanza de triángulos
- Semejanza y paralelismo
- Aplicación de semejanza y triángulos semejantes

Unidad 6: Teorema de Pitágoras
- Teorema de Pitágoras
- Aplicación del teorema de Pitágoras

Unidad 7: Ángulo inscrito y central
- Ángulo central e inscrito
- Aplicación del ángulo central e inscrito

Plan de estudio de la Unidad

Lección	Horas	Clases
1. Movimiento de figuras en el plano	1	1. Puntos y rectas
	1	2. Patrones de figuras
	1	3. Traslación
	1	4. Simetría
	1	5. Rotación
	1	6. Resolución de problemas de movimiento de figuras
2. Círculos, segmentos y ángulos	1	1. Características y elementos del círculo
	1	2. Características de círculos que se intersecan
	1	3. Dibujo de figuras planas utilizando regla y compás
	1	4. Rectas perpendiculares
	1	5. Distancia entre un punto y una línea recta
	1	6. Mediatriz de un segmento
	1	7. Bisectriz de un ángulo
	1	8. Tangente a una circunferencia
	1	9. Longitud de arco de un sector circular
	1	10. Área de un sector circular
	1	11. Incentro de un triángulo
3. Planos, cuerpos geométricos, área total de prisma, pirámide y cilindro	1	1. Clasificación de cuerpos geométricos
	1	2. Características de poliedros regulares
	1	3. Relación de posición entre rectas y planos
	1	4. Perpendicularidad entre un plano y una recta

Lección	Horas	Clases
	1	5. Cuerpos geométricos formados por el movimiento de figuras planas
	1	6. Proyección ortogonal
	1	7. Desarrollo plano de un prisma y su área total
	1	8. Desarrollo plano de una pirámide y su área total
	1	9. Desarrollo plano de un cilindro y su área total
	1	10. Practica lo aprendido
	1	Prueba de la Unidad 8
	1	Prueba del tercer trimestre

27 horas clase + prueba de la Unidad 8 + prueba del tercer trimestre.

Lección 1: Movimiento de figuras en el plano
En esta lección se aborda la notación para un segmento, rectas perpendiculares, rectas paralelas y también se trabajan los tipos de movimientos de una figura en el plano: la traslación, la simetría y la rotación.

Lección 2: Círculos, segmentos y ángulos
Al inicio de la lección se hace un recordatorio de los elementos de un círculo y de un sector circular, para posteriormente utilizarlos cuando se presentan las características de dos círculos que se intersecan. Las características de los dos círculos intersecados básicamente hacen referencia a ciertas propiedades que guardan sus circunferencias. Dichas características son utilizadas para construir figuras con regla y compás, con el fin de que el estudiante visualice algunas propiedades de esas figuras intuitivamente, es decir, a partir de la construcción de ellas. Como ejemplo de estas figuras se tiene, un hexágono, un triángulo equilátero, rectas perpendiculares, mediatriz de un segmento, bisectriz de un ángulo, recta tangente a una circunferencia e incentro de un triángulo. Al finalizar la lección se utiliza la proporcionalidad directa para deducir las fórmulas de la longitud de arco y área de un sector circular.

Lección 3: Planos, cuerpos geométricos, área total del prisma, pirámide y cilindro
En esta lección se comienza haciendo una clasificación de los cuerpos geométricos en poliedros y cuerpos redondos, para posteriormente abordar las características de los poliedros regulares; se introducen los planos y la relación de posición que tienen dos o más rectas en ellos. Otro aspecto importante de esta lección es introducir la perpendicularidad de una recta con un plano, para retomar este concepto al introducir la altura de prismas, cilindros, pirámides y conos; también se presentan los cuerpos geométricos como el movimiento de una figura plana a través de una recta perpendicular a ella.

Como anteriormente se presentó el concepto de plano, se trabaja con la proyección ortogonal de un cuerpo geométrico como la sombra de un cuerpo geométrico en tres planos representados por paredes cuya posición es diferente: vista frontal, vista lateral y vista sobre el piso; cuando es alumbrado con una lámpara, considerando que los rayos de luz generados por la lámpara son perpendiculares a las paredes, es decir, a los planos. Para finalizar la lección se hace el desarrollo plano de prismas, pirámides y cilindros para deducir sus respectivas fórmulas para calcular su área total.

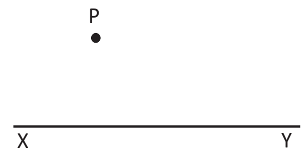
Lección 1 Movimiento de figuras en el plano

1.1 Puntos y rectas

P

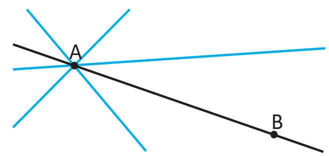
1. En la imagen de la derecha se tienen los puntos A y B.
   a) Traza líneas rectas que pasen solo por A.
   b) Traza líneas rectas que pasen a la vez por A y por B.

2. En la imagen se tiene la recta XY y el punto P.
   a) Traza rectas que pasen por P y que corten a la recta XY.
   b) Traza rectas que pasen por P, pero que nunca corten a la recta XY.

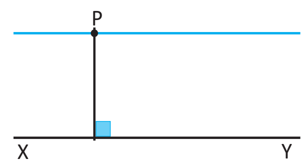


S

1. a) Se pueden trazar distintas rectas, en realidad, infinitas líneas rectas que pasen por el punto A.
   b) Únicamente existe una línea recta que pase por los dos puntos.

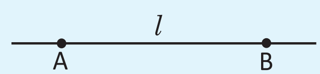


2. a) De entre todas las rectas que se pueden trazar hay una que es perpendicular a la recta XY.
   b) La recta trazada debe ser la paralela que pase por P.

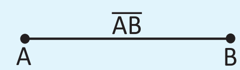


C

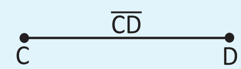
a) La línea que pasa por los puntos A, B y se extiende indefinidamente se llama **línea recta AB**, regularmente se denota con una letra por ejemplo l, m, etc.



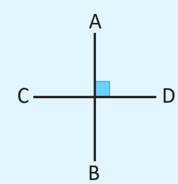
b) A la figura formada por la unión de A y B se le llama **segmento AB**, se simboliza como $\overline{AB}$ y se lee "segmento AB".



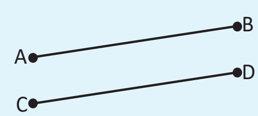
c) Si dos segmentos tienen igual longitud, tal como $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, entonces se simboliza como AB = CD. Al referirse a la longitud de un segmento se omite el símbolo (‾) en la escritura. La longitud de $\overline{AB}$ es AB.



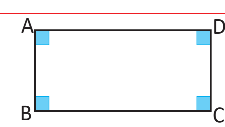
d) Cuando una recta corta a otra formando un ángulo de 90° se les llama **rectas perpendiculares**; se utiliza el símbolo (⊥) para representar este hecho. En la imagen $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ y se lee "el segmento AB es perpendicular al segmento CD".



e) A dos rectas que jamás se corten una con la otra se les llama **rectas paralelas** y se utiliza el símbolo (∥). En la imagen $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ se lee "el segmento AB es paralelo al segmento CD".

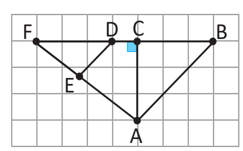


1. Observa el siguiente rectángulo, utiliza los símbolos (∥) o (⊥) para establecer la relación entre los siguientes segmentos.



La relación entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
La relación entre $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$. $\overline{AB} \perp \overline{AD}$
La relación entre $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. $\overline{AB} \perp$ BC

2. En la siguiente figura utiliza los símbolos (∥) o (⊥) para indicar cuáles de los segmentos, que se muestran, son paralelos y cuáles son perpendiculares.



$\overline{AB} \parallel \overline{ED}$ $\overline{AC} \perp \overline{BF}$

152

Indicador de logro

1.1 Representa con lenguaje matemático la relación entre segmentos o rectas.

Secuencia

Los estudiantes ya dominan los conceptos de línea recta, rectas paralelas y perpendiculares, por lo que para esta clase se hace un recordatorio; se establecen algunos conceptos nuevos y sus respectivas notaciones. La línea recta es denotada por letras como l, m, el segmento denotado con “‾”, rectas perpendiculares denotadas por “⊥” y rectas paralelas denotadas por “∥”. En el caso de los segmentos se hace la aclaración de que al referirse a su longitud se omite el símbolo “‾” en su escritura. De igual manera se hace una relación de las rectas con puntos, por ejemplo, se señala el hecho de que por un punto pasan infinitas rectas y que por dos puntos pasa una única recta.

Propósito

Ⓟ Destacar que por un punto pasan infinitas rectas y que por dos puntos pasa una única recta. También que existe una única recta paralela a otra dada y que pasa por un punto dado fuera de esta.

Ⓢ Definir la terminología y presentar sus notaciones. En este punto se debe resaltar que al omitir el símbolo “‾” en la escritura de un segmento se hace referencia a su longitud.

Solución de algunos ítems:

1. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
   $\overline{AB} \perp \overline{AD}$
   $\overline{AB} \perp \overline{BC}$

2. $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$
   $\overline{AC} \perp \overline{BF}$

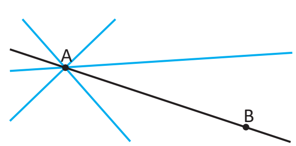
Fecha:

U8 1.1

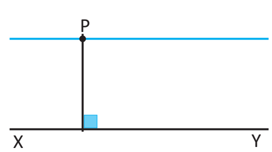
Ⓟ 1. Para dos puntos A y B. Traza líneas rectas que
a) Pasen solo por A.
b) Pasen a la vez por A y por B.

2. Para una recta XY y un punto P. Traza líneas rectas que
a) Pasen por P y que corten a la recta XY.
b) Pasen por P, pero que nunca corten a la recta XY.

Ⓢ 1. a) Se pueden trazar infinitas líneas rectas que pasen por el punto A.
b) Hay una única línea recta que pasa por los dos puntos.



2. a) De todas las rectas que se pueden trazar hay una que es perpendicular a la recta XY.
b) La recta trazada debe ser la paralela que pase por P.



Ⓡ 1. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
$\overline{AB} \perp \overline{AD}$
$\overline{AB} \perp \overline{BC}$

2. $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$
$\overline{AC} \perp \overline{BF}$

Tarea: página 162 del Cuaderno de Ejercicios.

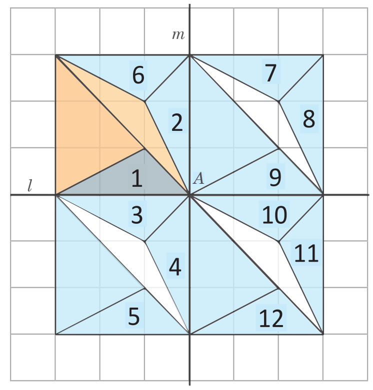
Lección 1

1.2 Patrones de figuras

P

La imagen ha sido creada a partir de los desplazamientos de las figuras coloreadas con un tono más fuerte. Responde lo siguiente:

a) ¿Con cuál de las figuras se sobrepondrá la figura 1 si se desplaza de forma paralela?
b) Si se dobla la imagen por la recta l, ¿sobre cuál figura se sobrepondrá la figura 1?
c) Si se gira la figura 1 con un ángulo de 90° en sentido antihorario con respecto al punto A, ¿con cuál de las figuras se sobrepone?



S

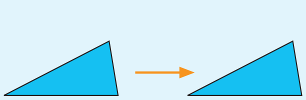
a) Si se desplaza de forma paralela la figura 1, esta puede sobreponerse sobre las figuras 9, 5 y 12.
b) Si se dobla la imagen por la recta l, la figura 1 se sobrepondrá sobre la figura 3.
c) Si se gira la figura 1 con un ángulo de 90°, y el giro es en sentido antihorario, se sobrepondrá sobre la figura 4.

C

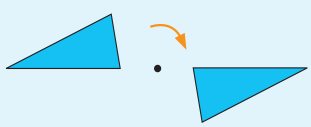
El movimiento de una figura sin cambiar su tamaño o forma recibe un nombre según la manera en la que se hace.

Existen tres tipos de movimiento:

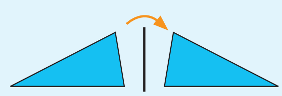
Traslación



Rotación



Simetría



E

Existe una técnica para crear obras de arte utilizando la traslación, rotación o simetría de una figura, esta consiste en cubrir un plano utilizando la figura, las cuales se mueven de forma que no queden huecos en todo el plano ni se traslapen.

A esta técnica se le llama **Teselado**.

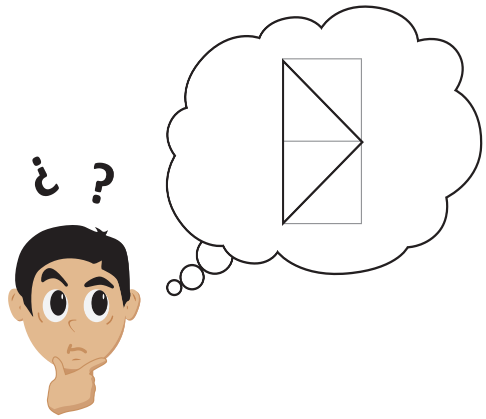
Maurits Cornelis Escher (1898 - 1972) es uno de los artistas gráficos más famosos del mundo. Su arte es disfrutado por millones de personas en todo el mundo. Escher utilizó mucho el teselado en sus obras.

Horse/Bird (No.76) 1949 Colored pencil, ink, watercolor. De M. C. Escher. Retomado de la página oficial de www.mcescher.com

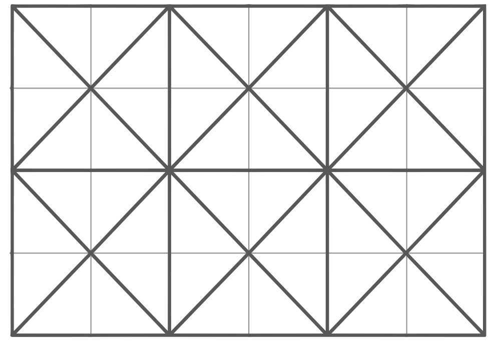
Retrato de Esher en Roma. De M. C. Escher.

Unidad 8

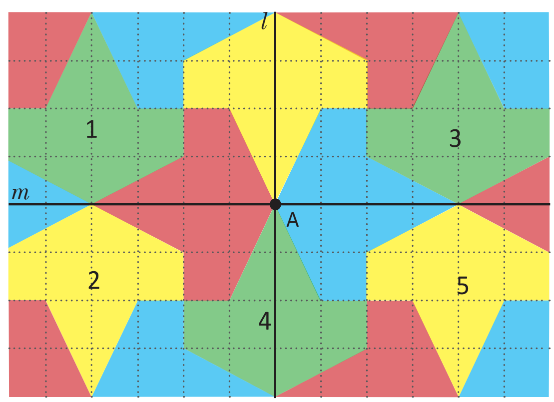
Carlos pensó en utilizar un triángulo como el que se muestra en la imagen para llenar una cuadrícula sin dejar espacio alguno y sin que se traslaparan.



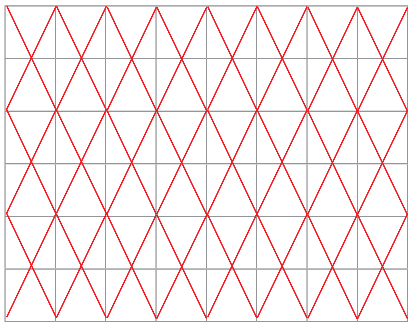
Y obtuvo el resultado que se observa en la imagen.

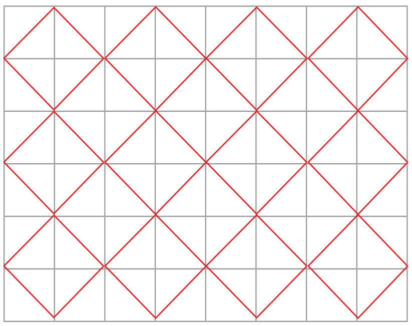


1. Según lo aprendido, una figura puede moverse en el plano mediante una traslación, rotación o simetría.
   Con base en la imagen de la derecha, responde las siguientes preguntas. Los ejes pueden ser las rectas l y m y el punto de rotación será A.
   a) ¿Qué tipo de movimiento debe realizarse para sobreponer la figura 1 a la figura 5? a) Rotación
   b) ¿Con cuáles figuras se sobrepondría la figura 1 si se realiza una traslación? b) 3 y 4
   c) Si se dobla la imagen por la recta m, ¿a cuál figura se sobrepondrá la figura 1?, ¿y si se hace respecto a la recta l? c) 2 y 3



2. **¡Construyendo teselados!** Piensa cómo hizo Carlos el teselado en el ejemplo presentado y llena las siguientes cuadrículas, utilizando únicamente una figura simple, repitiéndola varias veces sin dejar espacio vacío.





¡Compara con tus compañeros!

Indicador de logro

1.2 Identifica diferentes tipos de movimientos de figuras geométricas.

Secuencia

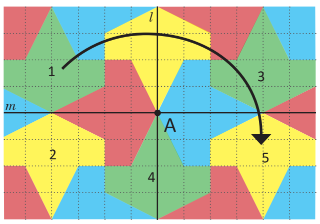
En grados anteriores se introdujeron los movimientos de figuras en el plano: traslación, rotación y simetría. Para esta clase se retoman los tres movimientos, abordándolos de una forma general, pero posteriormente se retomará cada uno. Para determinar la figura simétrica de otra, se hace respecto a rectas denotadas de la forma establecida en la clase anterior, por ejemplo l y m.

Propósito

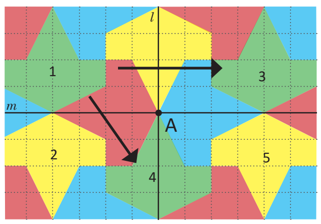
Ⓟ Identificar una figura que se sobrepone a otra al moverla. Si los estudiantes presentan dudas en a) respecto a la expresión "si se desplaza de forma paralela", explicar que se refiere a tomar una figura de las presentadas y que esta puede moverse únicamente ya sea, a la izquierda, derecha, arriba, abajo o diagonalmente.

Solución de algunos ítems:

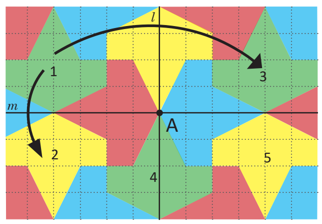
1. a) Rotación



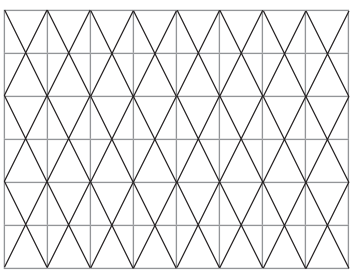
b) 3 y 4

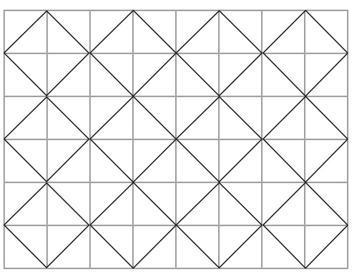


c) 2 y 3



2.



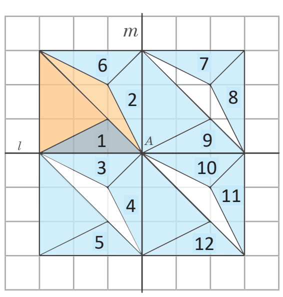


Fecha: **U8 1.2**

Ⓟ Se movieron las figuras coloreadas con tono más fuerte para hacer la imagen. Responde:

a) ¿Con cuál figura se sobrepondrá la 1 al desplazarse de forma paralela?

b) Si se dobla la imagen por l, ¿a cuál figura se sobrepondrá la 1?



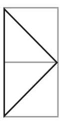
c) Si se gira la figura 1 con un ángulo de 90° en sentido antihorario respecto a A, ¿con cuál de las figuras se sobrepone?

Ⓢ a) Se puede sobreponer a las figuras 9, 5 y 12.

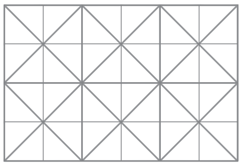
b) Se sobrepone a la figura 3.

c) Se sobrepondrá a la figura 4.

Ⓔ Con la imagen:



Se llena una cuadrícula sin dejar espacio y sin traslaparse así:



Ⓡ 1. a) Rotación

b) 3 y 4

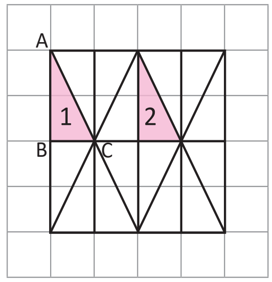
c) 2 y 3

Tarea: página 163 del Cuaderno de Ejercicios.

1.3 Traslación

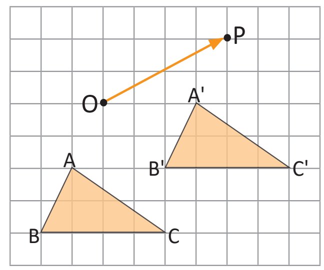
P

1. Observa la figura, al trasladarse el triángulo 1 de la imagen, se puede sobreponer al triángulo 2.
   a) Identifica los puntos A' y C' los cuales son los trasladados de los puntos A y C.
   b) Traza $\overline{AA'}$ y $\overline{CC'}$.
   c) Expresa simbólicamente la relación que hay entre la longitud de $\overline{AA'}$ y $\overline{CC'}$.
   d) ¿Qué movimiento hay que aplicar al triángulo 1 para que se sobreponga el triángulo 2?



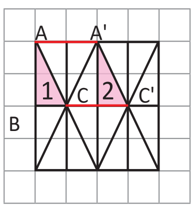
Para denotar un triángulo con vértices A, B y C se utiliza el símbolo "Δ", escribiendo ΔABC, y se lee "el triángulo ABC".

2. El ΔA'B'C' es el trasladado del ΔABC en la dirección y por la longitud que indica la flecha OP. Observa que la flecha avanza 4 unidades a la derecha y 2 hacia arriba.
   a) Traza $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ que unen los vértices correspondientes de los dos triángulos.
   b) Expresa simbólicamente la relación que existe entre los segmentos mencionados en a).



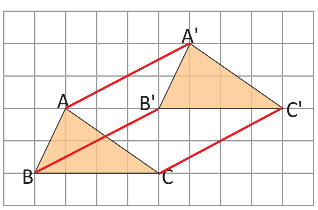
S

1. a) y b)



c) La relación que existe entre $\overline{AA'}$ y $\overline{CC'}$ se expresa como $\overline{AA'} \parallel \overline{CC'}$. Además AA'= CC'.
d) Al triángulo 1 debe aplicarse una traslación para sobreponerse al triángulo 2.

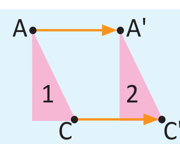
2. a)



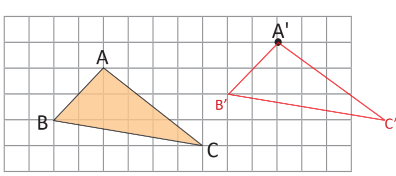
b) La relación entre los segmentos se expresa así:
$\overline{AA'} \parallel \overline{BB'} \parallel \overline{CC'}$ y AA' = BB' = CC'.

C

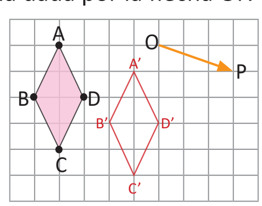
En la traslación, los segmentos correspondientes son paralelos y tienen la misma longitud, es decir, la traslación conserva distancias. Tal y como en el problema anterior que se tenía $\overline{AA'} \parallel \overline{CC'}$ y AA'= CC'.



1. Dibuja $\overline{AA'}$ y elabora el ΔA'B'C' con base en la dirección y longitud de $\overline{AA'}$, de modo que sea el trasladado del ΔABC.



2. Dibuja la figura trasladada A'B'C'D' del cuadrilátero ABCD, utilizando la dirección y la distancia dada por la flecha OP.



Unidad 8

Indicador de logro

1.3 Traslada figuras mediante una dirección y un sentido de paralelismo.

Secuencia

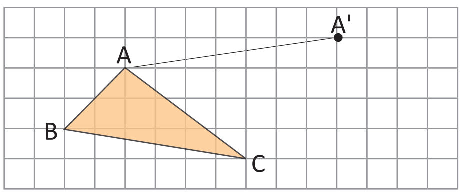
En esta clase se retoma el movimiento de traslación introducido en la clase anterior, también se usan con mayor frecuencia algunos conceptos y notaciones definidas en la clase 1.1 de esta unidad, tales como los segmentos, su longitud y la notación de dos rectas perpendiculares.

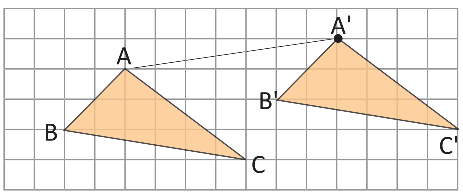
Propósito

Ⓟ Establecer que en una traslación todos los segmentos correspondientes tienen la misma longitud y son paralelos. Esto incluye a los segmentos que unen los puntos correspondientes. Para el ejemplo se refiere a $\overline{AA'} \parallel \overline{CC'}$ y $AA' = CC'$.

Solución de algunos ítems:

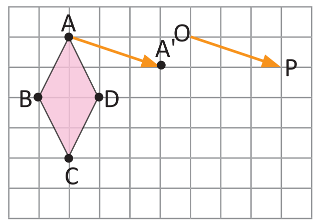
1.

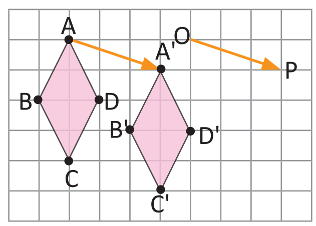




Hay que agregar una columna más a la cuadrícula.

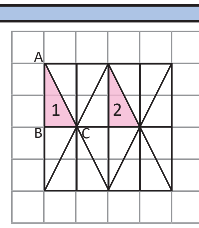
2.





Fecha: **U8 1.3**

Ⓟ 1. Se puede trasladar y sobreponer el triángulo 1 al 2.



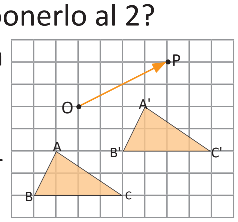
a) Identifica los puntos A' y C' que son los trasladados de A y C.

b) Traza $\overline{AA'}$ y $\overline{CC'}$.

c) Expresa la relación entre la longitud de $\overline{AA'}$ y $\overline{CC'}$.

d) ¿Cómo hay que mover al triángulo 1 para sobreponerlo al 2?

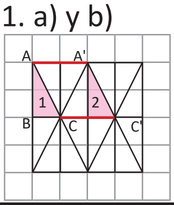
2. El ΔA'B'C' es el trasladado del ΔABC en la dirección y longitud de la flecha OP.



a) Traza $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$.

b) Expresa la relación entre los segmentos determinados en a).

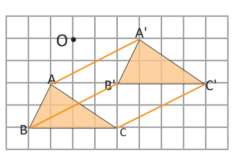
Ⓢ 1. a) y b)



c) $\overline{AA'} \parallel \overline{CC'}$.
Además
$AA' = CC'$.

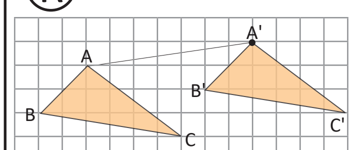
d) Traslación

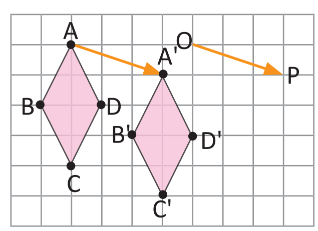
2. a)



b) $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'} \parallel \overline{CC'}$
y
$AA' = BB' = CC'$

Ⓡ



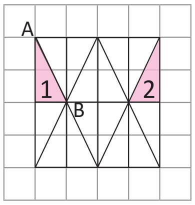


Tarea: página 164 del Cuaderno de Ejercicios.

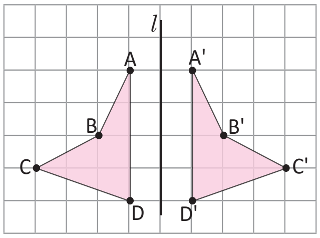
1.4 Simetría

P

1. Al mover el triángulo 1 de la imagen, se puede sobreponer al triángulo 2.
   a) Identifica los puntos A' y B' en el triángulo 2, a los cuales se sobreponen los puntos A y B al mover el triángulo 1.
   b) ¿Cómo se debe mover el triángulo 1 para sobreponerse al triángulo 2?

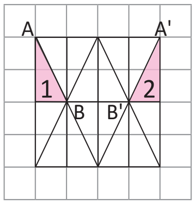


2. El cuadrilátero A'B'C'D' del lado derecho se ha obtenido de mover el cuadrilátero ABCD.
   a) Traza los segmentos por los que se conectan los vértices correspondientes.
   b) Expresa simbólicamente la relación entre los segmentos trazados en a) y la recta l.
   c) Nombra M al punto que es la intersección entre $\overline{CC'}$ y l.
   d) Expresa simbólicamente la relación entre $\overline{CM}$ y $\overline{C'M}$.



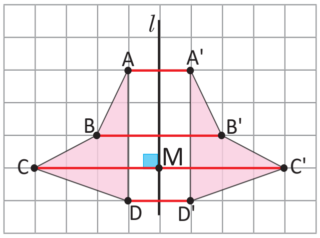
S

1. a)



b) Se debe hacer una simetría.

2. a) y c)



b) La relación entre la recta l y cada segmento se expresa con el símbolo (⊥). Por ejemplo, $\overline{AA'} \perp l$.

d) La relación entre $\overline{CM}$ y $\overline{C'M}$ se expresa como: CM = C'M.

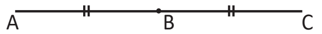
C

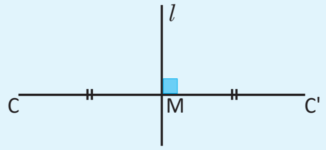
El movimiento que se realiza doblando el dibujo por medio de un eje se llama **simetría** y el eje se llama **eje de simetría**.

En la simetría, el segmento que conecta 2 puntos correspondientes se intersecta con el eje perpendicularmente, formando dos segmentos iguales. Así en el ejemplo $\overline{CC'} \perp l$ y CM = C'M.

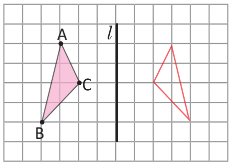
En el ejemplo la recta l pasa perpendicularmente por el punto medio del segmento $\overline{CC'}$. A esta recta se le llama **mediatriz** de $\overline{CC'}$.

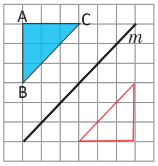
En geometría se utilizan símbolos como ॥ para denotar que dos o más segmento son iguales, por ejemplo, para denotar que AB = BC se hace:





Dibuja la figura simétrica en cada imagen, respecto a la recta l y la recta m respectivamente.





Traza adecuadamente segmentos perpendiculares a m.

Indicador de logro

1.4 Refleja figuras respecto a una recta que es el eje de simetría.

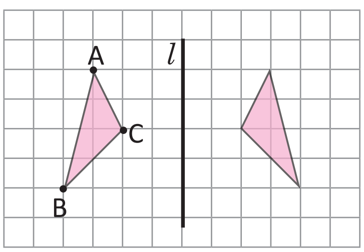
Secuencia

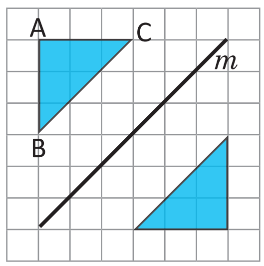
Se trabaja con la simetría para seguir con el abordaje individual de los movimientos de figuras en el plano que fueron establecidos en la clase 1.2 de esta unidad. Para esta clase se hace uso de la notación de la perpendicularidad entre dos rectas que se estableció en la clase 1.1. También se introduce el concepto de mediatriz de un segmento, el cual se retoma posteriormente. Vale aclarar que en grados anteriores se ha trabajado el concepto de eje de simetría, pero en esta clase se ha tomado a bien presentarlo nuevamente.

Propósito

Ⓟ Establecer el concepto de **simetría** y **eje de simetría**. En este momento de la clase es importante hacer hincapié en cómo se denotan los segmentos iguales. También se aprovecha para introducir el término de **mediatriz de un segmento** y sus características.

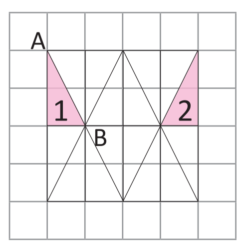
Solución de algunos ítems:



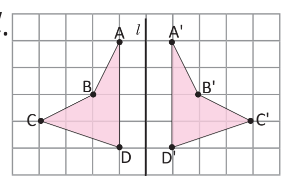


Fecha: **U8 1.4**

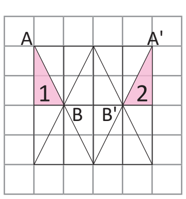
Ⓟ 1. a) Identifica los puntos A' y B' en el triángulo 2, a los que se sobreponen A y B.
b) ¿Cómo hay que mover el triángulo 1 para sobreponerlo al 2?



2. a) Une los vértices correspondientes con segmentos.
b) Escribe la relación de los segmentos hechos en a) y l.
c) Nombra con M la intersección de $\overline{CC'}$ y l.
d) Expresa la relación entre $\overline{CM}$ y $\overline{C'M}$.

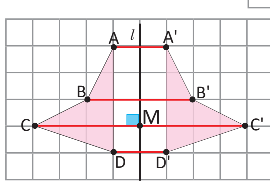


Ⓢ 1. a)



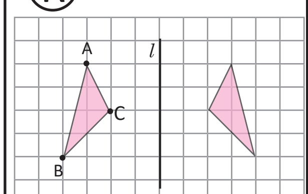
b) Se debe hacer una simetría.

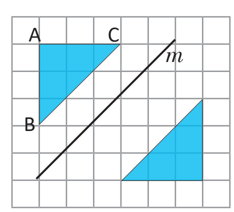
2. a) y c)



b) $\overline{AA'} \perp l$, $\overline{BB'} \perp l$, $\overline{CC'} \perp l$ y $\overline{DD'} \perp l$.
d) CM = C'M.

Ⓡ





Tarea: Página 165 del Cuaderno de Ejercicios.

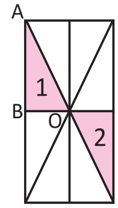
1.5 Rotación

P

Al mover el triángulo 1 de la imagen, se puede sobreponer al triángulo 2.

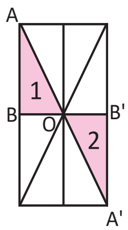
a) Coloca los puntos A' y B' en el triángulo 2, a los cuales se sobreponen los puntos A y B al trasladar el triángulo 1.

b) ¿Cómo se debe mover el triángulo 1 para sobreponerse al triángulo 2?



S

a)

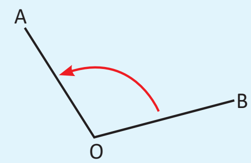


b) El triángulo 1 se puede sobreponer al triángulo 2 aplicando una rotación respecto al punto O y por un ángulo de 180°.

C

Al movimiento de una figura con un determinado ángulo respecto a un punto central se le llama **rotación**.

Generalmente, el sentido del ángulo de rotación se considera en contra de las agujas del reloj. Por ejemplo, la imagen muestra la rotación de OB a OA con el ∢BOA.

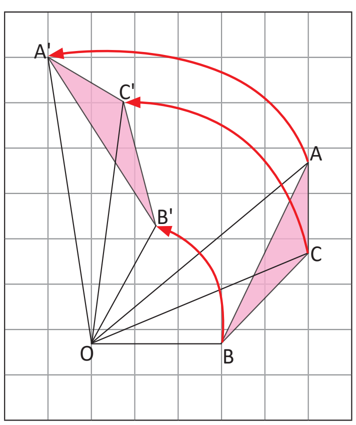


E

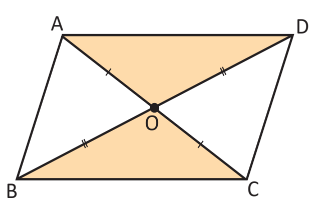
Tomando como centro de rotación el punto O, se ha rotado el ΔABC por un ángulo de 60° para llegar a ser el ΔA'B'C'.

a) ¿Qué relación hay entre $\overline{OA}$ y $\overline{OA}$'?

b) ¿Qué figura describe el movimiento del punto A hasta el punto A'?



Cuando se hace una simetría por rotación con un ángulo de 180°, se le llama **rotación simétrica**. Como en la figura, al rotar 180° el ΔAOD, respecto del punto O, este se puede sobreponer al triángulo correspondiente del mismo color. Observa los lados que son correspondientes. Se puede concluir que en un paralelogramo sus diagonales se bisecan, es decir se cortan en segmentos iguales.

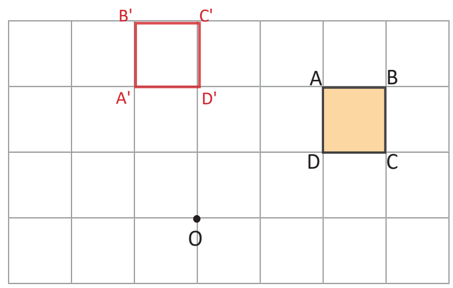


Solución.

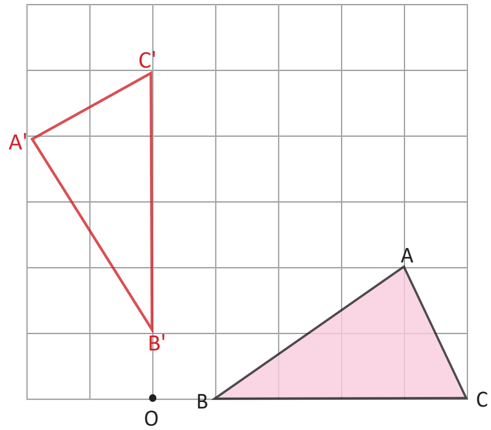
a) OA = OA'

b) Se forma una parte de la circunferencia que tiene como radio OA y como centro el punto O.

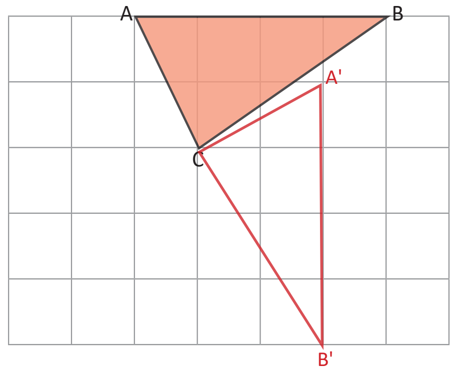
1. Dibuja el paralelogramo A'B'C'D', que es el rotado con respecto al punto O y un ángulo de 90° del paralelogramo ABCD. Utiliza tu compás y transportador.



2. Dibuja el ΔA'B'C' que es el rotado del ΔABC mediante una rotación con respecto al punto O y un ángulo de 90°.



3. Realiza una rotación de la siguiente figura respecto al punto C:



Indicador de logro

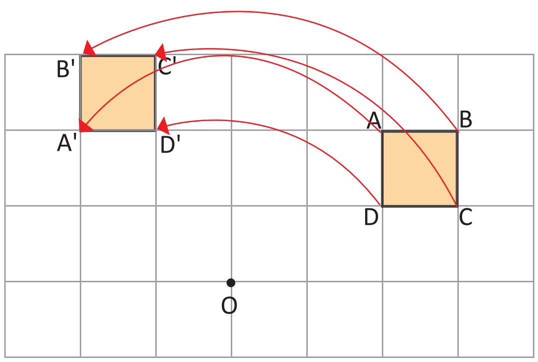
1.5 Rota figuras respecto a un punto utilizando un ángulo determinado.

Secuencia

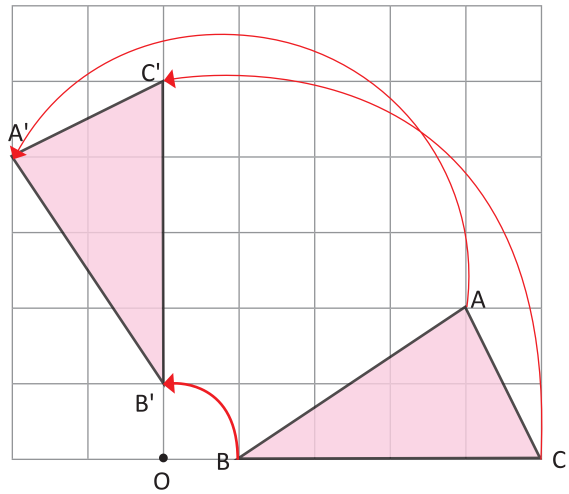
Para finalizar con el abordaje individual de los movimientos de las figuras en el plano se estudia la rotación.

Solución de algunos ítems:

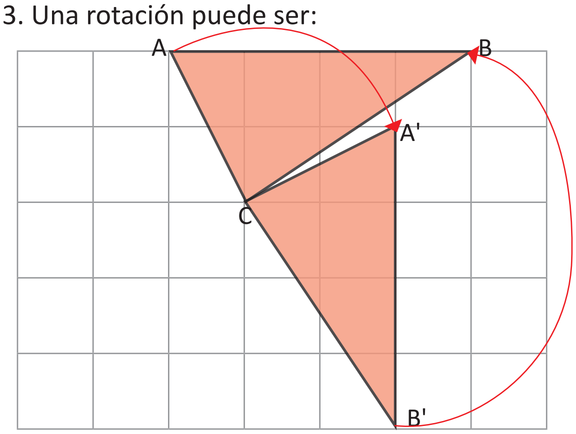
1.



2.



3. Una rotación puede ser:

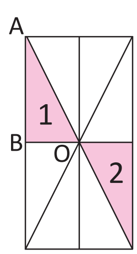


Fecha: **U8 1.5**

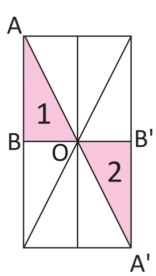
Ⓟ Al mover el triángulo 1, se puede sobreponer al 2.

a) Coloca los puntos A' y B' en el triángulo 2, a los que se sobreponen los puntos A y B al trasladar el 1.

b) ¿Cómo se debe mover el triángulo 1 para sobreponerse al 2?

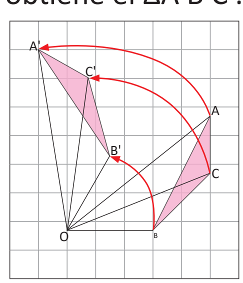


Ⓢ a)



b) El triángulo 1 se sobrepone al 2 con una rotación respecto al punto O con ángulo de 180°.

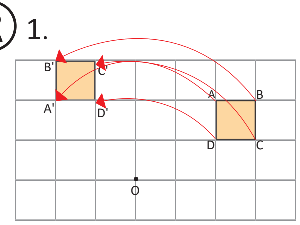
Ⓔ Al rotar el ΔABC respecto a O en 60°, se obtiene el $\Delta A'B'C'$.



a) La relación de $\overline{OA}$ y $\overline{OA'}$ es
OA = OA'

b) Al mover el punto A hasta A' se forma una parte de la circunferencia de radio OA y centro O.

Ⓡ 1.

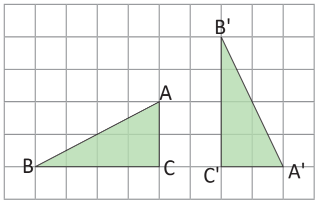


Tarea: página 166 del Cuaderno de Ejercicios.

1.6 Resolución de problemas de movimiento de figuras

P

¿Cómo debe moverse el ΔABC para lograr sobreponerse al ΔA'B'C'?



S

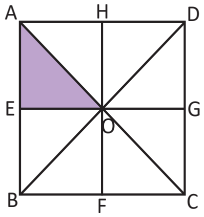
Un ejemplo de solución es, primero se mueve el ΔABC con una rotación con respecto al punto C y con un ángulo de 90° en sentido horario, luego se traslada la figura en la dirección de C a C' de $\overline{CC'}$.

C

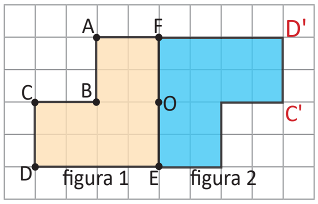
Como en los triángulos ΔABC y ΔA'B'C' cuando se mueve una figura y se logra sobreponer sobre otra, se dice que las dos figuras son **congruentes**.

1. En la siguiente figura:
   a) ¿Qué movimiento se debe hacer al ΔOAE para sobreponerse al ΔODG?
   b) ¿Qué movimiento se debe hacer al ΔOAE para sobreponerse al ΔOBF?
   c) ¿Qué movimiento se debe hacer al ΔOAE para sobreponerse al ΔOCF?

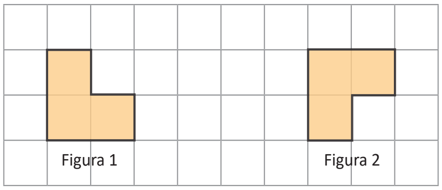
   a) Simetría
   b) Rotación
   c) Traslación o simetría



2. Responde los literales según las dos imágenes que se presentan.
   a) Si la figura 2 se ha obtenido de mover la figura 1, coloca los puntos C' y D' en la figura 2 de tal manera que se correspondan a los puntos C y D de la figura 1. Rotación
   b) ¿Cómo debe moverse la figura 1 para sobreponerse exactamente a la figura 2?



3. Haciendo más de un movimiento en la imagen, ¿cómo se puede sobreponer la figura 1 a la figura 2?



1º Rotación
2º Traslación
El orden en que se hacen los movimientos puede cambiar.

Indicador de logro

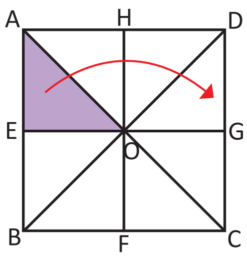
1.6 Utiliza los movimientos de una figura para sobreponerla en otra y determinar si son congruentes.

Secuencia

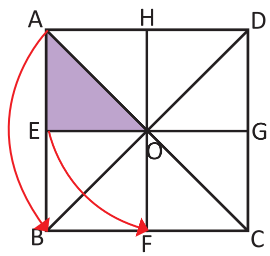
Anteriormente se abordaron a detalle cada uno de los movimientos de las figuras en el plano. Por tanto, en esta clase se presentan problemas en los que se deben aplicar los movimientos. También se aprovecha para introducir el concepto de **figuras congruentes**.

Solución de algunos ítems:

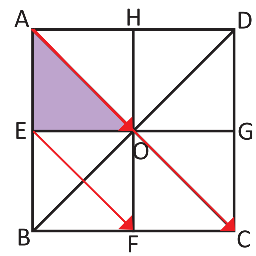
1. a) Simetría:



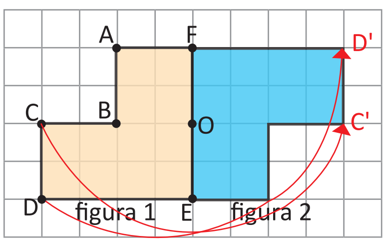
b) Rotación:



c) Traslación o simetría:



2.
a)

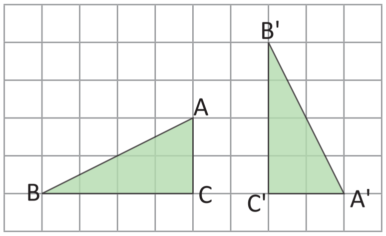


b) Rotación. La figura 1 también puede moverse de otra forma, pero implicaría más de un movimiento, puede hacerse a través de una rotación y luego una traslación.

Fecha:

U8 1.6

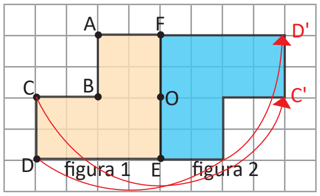
Ⓟ ¿Cómo debe moverse el ΔABC para lograr sobreponerse al ΔA'B'C'?



Ⓢ Un ejemplo de solución es: primero se mueve el ΔABC con una rotación con respecto al punto C y con un ángulo de 90° en sentido horario, luego se traslada la figura en la dirección de C a C' de $\overline{CC'}$.

Ⓡ 1. a) Simetría
b) Rotación
c) Traslación o simetría

2. a)



b) Rotación. La figura 1 también puede moverse de otra forma, pero implicaría más de un movimiento.

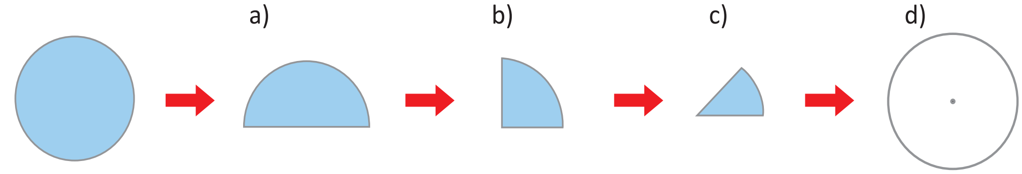
Tarea: página 167 del Cuaderno de Ejercicios.

2.1 Características y elementos del círculo

P

Tal y como se demuestra en las ilustraciones, se dobla un círculo siguiendo los pasos de los literales a), b) y c), sobreponiéndose.

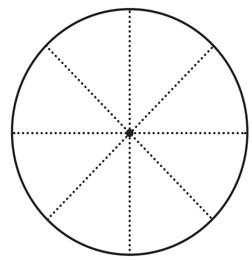
1. ¿Cómo se verían las marcas de los dobleces al abrir el círculo? Dibújalas en el círculo del literal d).



2. Las figuras a), b) y c) son sectores circulares. Encuentra los ángulos de cada uno.

S

1.



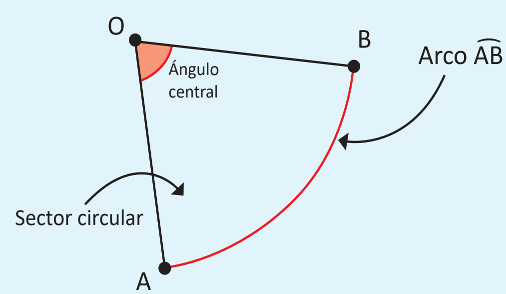
2. Los ángulos de cada sector circular son: a) 180°, b) 90° y c) 45°.

C

Cuando se tienen dos puntos A y B sobre la circunferencia, a la línea limitada por estos puntos se le llama **arco AB** y se expresa como $\overset{\frown}{AB}$.

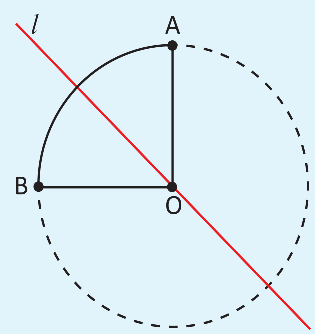
La figura limitada por los radios que pasan por los extremos del arco se llama **sector circular.**

El ángulo formado por los radios es llamado **ángulo central.**



Todo sector circular es una figura simétrica respecto a un eje.

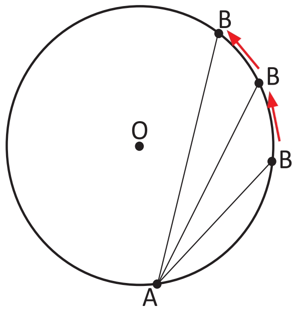
Por ejemplo en la imagen el sector circular OAB es simétrico respecto al eje l que pasa por el punto O y por el punto medio del arco $\overset{\frown}{AB}$.



Lección 2

E

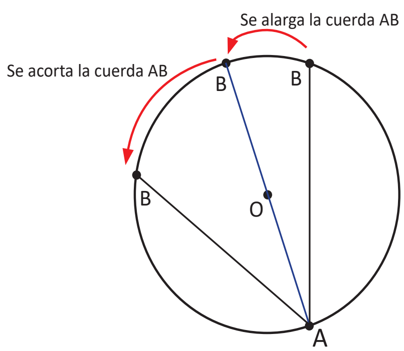
En la circunferencia de centro O se ha trazado la cuerda AB, si A es un punto fijo y B es un punto que se mueve en toda la circunferencia, ¿cuándo alcanzará $\overline{AB}$ su mayor longitud y será un eje de simetría de la circunferencia?



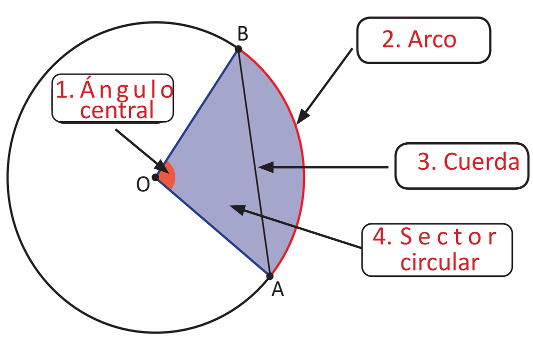
Elementos de un círculo
Centro: El punto que está ubicado en el centro de un círculo.
Radio: El segmento que conecta el centro y cualquier punto del círculo.
Diámetro: El segmento de recta que une dos puntos de un círculo y que pasa por el centro.
Cuerda: Segmento que une dos puntos distintos que se encuentran sobre el círculo.

Solución.

$\overline{AB}$ alcanzará su mayor longitud y será un eje de simetría de la circunferencia, cuando pase sobre el punto O, es decir, cuando $\overline{AB}$ sea el diámetro de la circunferencia.

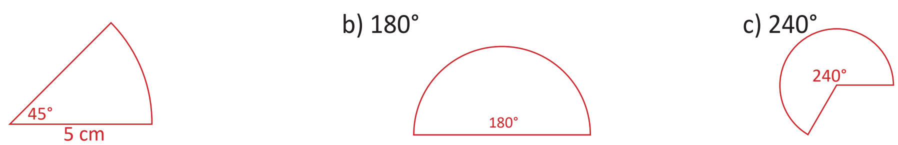


1. En la siguiente imagen, coloca el nombre correspondiente a cada elemento del círculo.



2. Dada la medida de un radio de 5 cm, dibuja en tu cuaderno los sectores circulares cuyos ángulos centrales sean de

a) 45° b) 180° c) 240°



Unidad 8

161

Indicador de logro

2.1 Identifica los elementos de un círculo.

Secuencia

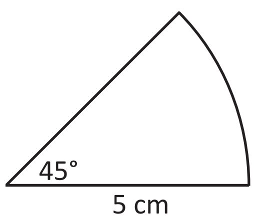
Los estudiantes ya han trabajado el círculo, el sector circular y sus elementos. También es importante tener en cuenta que cuando se habla de circunferencia se hace referencia al contorno de un círculo, esto ya fue definido en sexto grado. Para esta clase se retoman las nociones básicas que los estudiantes tienen de estos contenidos para facilitar la comprensión de una explicación más detallada del sector circular; también se hace la presentación de la notación del arco. Como en la clase 1.4 se confirmó el significado de eje de simetría, ya se puede hacer uso de esa idea para establecer que un sector circular es simétrico respecto al eje que pasa por el punto en el que se unen sus radios (O) y por el punto medio de su arco. En esta clase también se explica que el diámetro representa un eje de simetría para la circunferencia.

Propósito

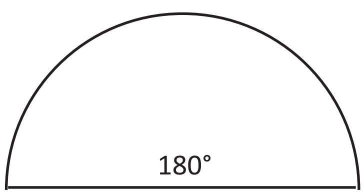
Ⓟ Recordar a los estudiantes que el término circunferencia hace referencia al contorno de un círculo, en palabras sencillas, "el borde del círculo".
Ⓢ Determinar que la cuerda de mayor longitud que es un eje de simetría de la circunferencia es el diámetro. En este punto de la clase es importante recalcar que el radio es el segmento que conecta el centro del círculo con cualquier punto de la circunferencia; el diámetro es el segmento que une dos puntos de la circunferencia y que pasa por el centro del círculo y la cuerda es el segmento que une dos puntos distintos que se encuentran sobre la circunferencia.

2.

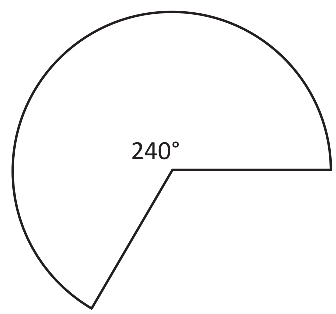
a)



b)



c)

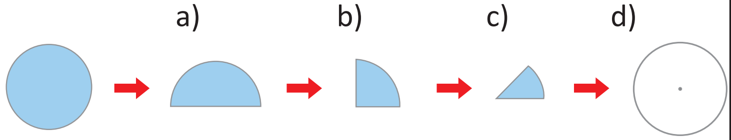


Fecha: **U8 2.1**

Ⓟ Se dobla un círculo con los pasos de a), b) y c), sobreponiéndose.

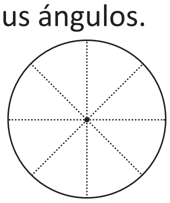
1. ¿Cómo se verían las marcas de los dobleces al abrir el círculo? Dibújalas en el círculo de d).

a) b) c) d)

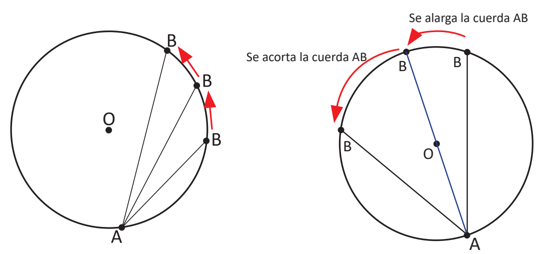


2. Las figuras a), b) y c) son sectores circulares. Encuentra sus ángulos.

Ⓢ 1.



Ⓔ Si A es fijo y B se mueve en la circunferencia, la mayor longitud de $\overline{AB}$ es cuando pasa por O convirtiéndose en eje de simetría. Por tanto es diámetro del círculo.



Ⓡ 1. Ángulo central
2. Arco
3. Cuerda
4. Sector circular

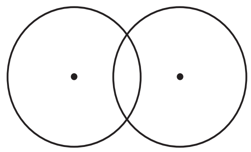
Tarea: página 168 del Cuaderno de Ejercicios.

2.2 Características de círculos que se intersectan

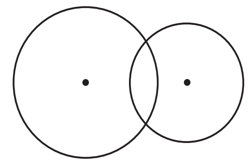
P

Para cada una de las figuras a) y b), dibuja los ejes de simetría.

a) Cuando los radios son iguales

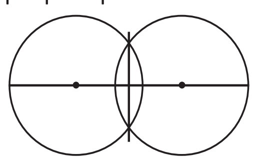


b) Cuando los radios son diferentes

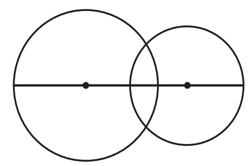


S

a) La recta que pasa por sus centros y la recta que pasa por sus intersecciones.



b) La recta que pasa por los centros.

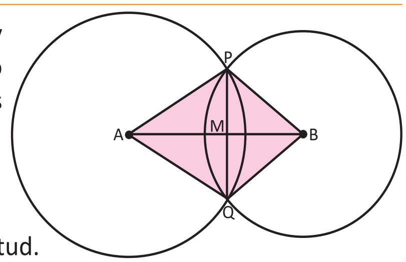


C

Dos círculos que se intersectan son simétricos respecto a la recta o eje que pasa por los centros de ambos círculos. Además, cuando los radios de los dos círculos tienen la misma longitud, la figura de dos círculos, también, es simétrica por la línea que pasa por los dos puntos de intersección.

E

En la imagen se observan dos círculos intersectados con centros A y B. Se marcan los puntos de intersección de las circunferencias como P y Q, también se marca el punto de intersección de los segmentos AB y PQ como el punto M.



Con respecto al cuadrilátero AQBP:

a) Indica todas las parejas de segmentos que tengan la misma longitud.

b) ¿Qué ángulo tiene el mismo tamaño que el ∢PAB?

c) ¿Qué relación hay entre $\overline{PQ}$ y $\overline{AB}$?

Solución.

Teniendo en cuenta el hecho de que la figura es simétrica por la recta que pasa por los centros de las circunferencias, se puede concluir:

a) $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$, $\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$, $\overline{PM}$ y $\overline{QM}$

b) ∢QAB

c) $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$

El segmento que une los puntos de intersección de dos circunferencias es perpendicular a la recta que une sus centros y está dividido en dos partes iguales con esta recta.

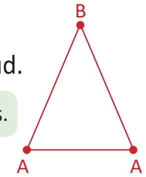
1. En el problema anterior:

a) ¿En qué caso sucederá que AM = MB? Los círculos son de igual radio.

b) Si se cumple que AM = MB, ¿qué figura es el cuadrilátero AQBP? Rombo.

2. Construye en tu cuaderno un triángulo isósceles cuyos lados iguales tengan AB de longitud.

Un triángulo con dos lados iguales se llama isósceles.



Indicador de logro

2.2 Identifica las características de dos círculos que se intersecan.

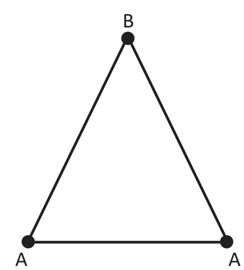
Secuencia

En sexto grado fue definido el concepto de circunferencia como el contorno de un círculo, en la clase 1.4 se introdujo el significado de eje de simetría, y en la clase anterior se utilizó para establecer que un sector es una figura simétrica; por tanto los estudiantes ya están familiarizados con los conceptos de circunferencia, eje de simetría y figura simétrica, de modo que ahora se puede presentar como característica la simetría de la figura de dos círculos que se intersecan, respecto a un eje. También se presentan como características de dos círculos que se intersecan, las consecuencias de la simetría, por ejemplo la igualdad en la longitud de algunos segmentos y abertura de algunos ángulos, y la perpendicularidad entre el segmento que une los radios con el que une las intersecciones de los círculos.

Propósito

Ⓟ Determinar que el segmento que une los puntos de intersección de dos circunferencias es perpendicular al que une sus centros y está dividido en dos partes iguales por este segmento. En la Ⓒ se hace referencia a que la recta que pasa por los centros es un eje de simetría de los círculos, por lo que se debe aclarar que en el Ⓔ el segmento que une los centros es eje de simetría por coincidir o estar incluido en la recta que pasa por los centros.

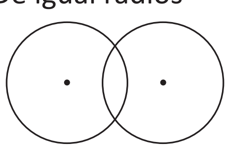
Se utiliza el compás para copiar la medida del segmento y hacer los lados del triángulo isósceles.



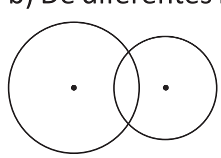
Fecha: **U8 2.2**

Ⓟ Dibuja los ejes de simetría para los círculos intersecados en a) y b).

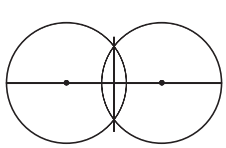
a) De igual radios



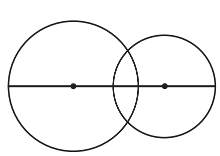
b) De diferentes radios



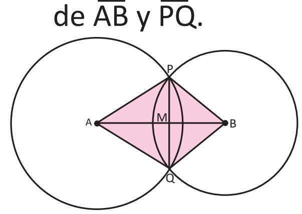
Ⓢ a) La recta que pasa por sus centros y la que pasa por las intersecciones de las circunferencias.



b) La recta que pasa por sus centros.



Ⓔ Círculos intersecados de centros A y B. Con puntos de intersección de las circunferencias P y Q. M es la intersección de $\overline{AB}$ y $\overline{PQ}$.



Como $\overline{AB}$ es eje de simetría de la figura, por tanto:

a) AP = AQ, BP = BQ, PM = QM

b) $\sphericalangle PAB = \sphericalangle QAB$

c) $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$

Ⓡ 1. a) Los círculos son de igual radio

b) Rombo

Tarea: página 169 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 2

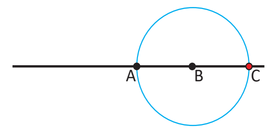
2.3 Dibujo de figuras planas utilizando regla y compás

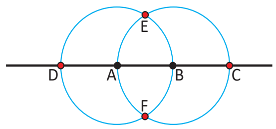
P

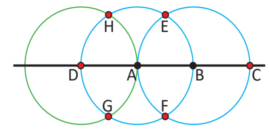
Las siguientes figuras desde a) hasta f) muestran los pasos para dibujar un hexágono; utilizando regla y compás, elabora uno siguiendo estos pasos y sin cambiar la abertura del compás.

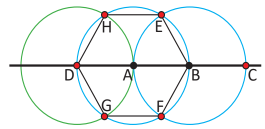
a)


b)


c)


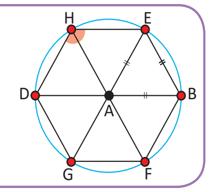
d)


e)


f)


S

Al dibujar un hexágono siguiendo los pasos anteriores, se forman seis triángulos, donde la longitud de todos los lados son iguales al radio de la circunferencia. Los triángulos son entonces equiláteros. También todos los ángulos internos de la figura son iguales a 120°. Por tanto, la figura es un hexágono.



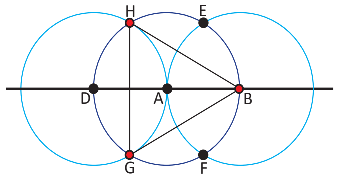
C

Se utilizó compás para dibujar círculos y arcos de circunferencias, así también, se pueden copiar las longitudes de segmentos.

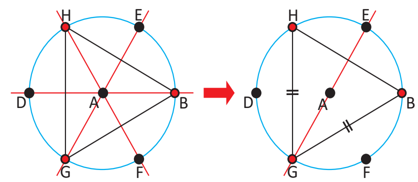
E

Siguiendo los mismos pasos de la construcción anterior se puede formar un triángulo, únicamente seleccionando tres puntos, como lo muestra la imagen.

a) Traza los ejes de simetría del triángulo que pasen por el punto A.
b) A partir de lo anterior, concluye por qué es posible formar un triángulo equilátero.



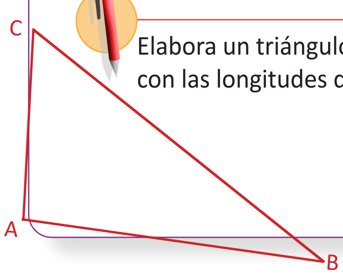
Solución.
Como ∢GAH = 120° = ∢GAB (se puede concluir de la Solución porque los triángulos que se forman son equiláteros) y también $\overline{AH} = \overline{AB}$ (por ser radios); entonces, los puntos H y B son simetrías respecto al diámetro GE. Sucede lo mismo con los diámetros HF y BD. Para ver estas simetrías, es más fácil rotar el ΔGBH 120° respecto al punto A.



Cumpliéndose entonces, GH = GB = HB. Por tanto, es un triángulo equilátero.

Además ∢HGB = ∢GBH = ∢BHG = 60°.

Elabora un triángulo que tenga los lados AB, BC y CA con las longitudes que se muestran en el gráfico:



Indicador de logro

2.3 Dibuja figuras geométricas utilizando regla y compás.

Secuencia

Con esta clase se busca que los estudiantes al construir con regla y compás diferentes figuras planas, intuitivamente confirmen o conozcan las propiedades de algunas de estas figuras. Además de lo anterior se establece que el compás puede ser utilizado para copiar longitudes de segmentos.

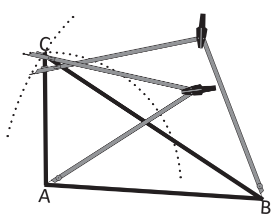
Propósito

Ⓟ Mostrar la construcción de un hexágono regular usando regla y compás. En este punto de la clase se establece que los triángulos que forman el hexágono son triángulos equiláteros, por tanto es un hexágono regular. A continuación se presenta la demostración utilizada para concluir que los triángulos que forman el hexágono son equiláteros.

1. $\overline{DH} = \overline{HA} = \overline{AD} = \overline{AE} = \overline{EB} = \overline{BA}$
2. ΔAEB y ΔAHD son equiláteros por 1.
3. $\sphericalangle EAB + \sphericalangle EAH + \sphericalangle HAD = 180°$ por formar un ángulo llano.
4. $\sphericalangle EAB = \sphericalangle HAD = 60°$ por 2.
5. $\sphericalangle EAH = 60°$ por 3 y 4.
6. $\sphericalangle AHE = \sphericalangle AEH = 60°$ por 1 y 5. Por tanto, ΔHAE es equilátero.

Dado que $\overline{DB}$ es diámetro del círculo, también el ΔAGF es equilátero por la simetría respecto a $\overline{DB}$.

Solución de algunos ítems:

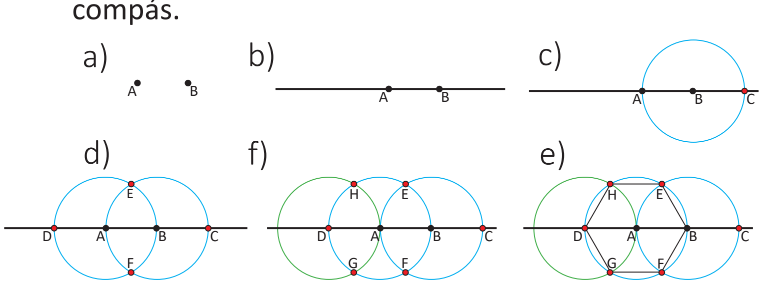


Puede haber varias soluciones, por lo que se presenta solo un ejemplo.
Se puede utilizar un compás para copiar las longitudes de los segmentos para dibujar el triángulo tal como se muestra en la ilustración.

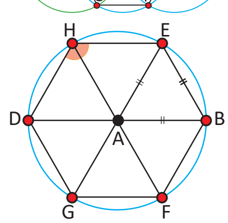
Al desarrollar la clase y realizar el plan pizarra, los pasos descritos en Ⓟ y Ⓔ pueden hacerse sobre una misma figura.

Fecha: **U8 2.3**

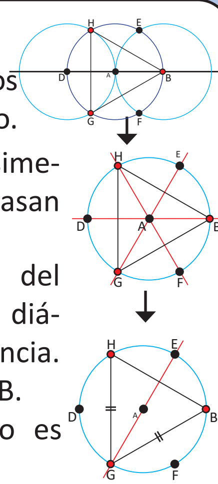
Ⓟ Utilizando regla y compás, elabora un hexágono siguiendo los pasos y sin cambiar la abertura del compás.



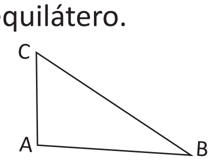
Ⓢ Se forman seis triángulos, la longitud de todos los lados son iguales al radio de la circunferencia. Por tanto son equiláteros.



Ⓔ Se eligen tres puntos para formar un triángulo.
Se trazan los ejes de simetría del triángulo que pasan por A.
Los ejes de simetría del triángulo resultan ser diámetros de la circunferencia.
Entonces, GH = GB = HB.
Por tanto el triángulo es equilátero.



Ⓡ



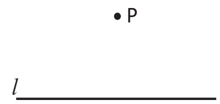
Tarea: página 170 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 2

2.4 Rectas perpendiculares

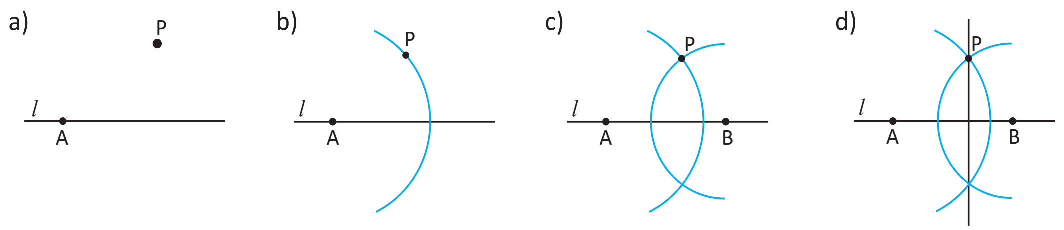
P

En tu cuaderno, utilizando únicamente regla y compás, traza una recta perpendicular a la recta *l* y que pase por el punto P.



S

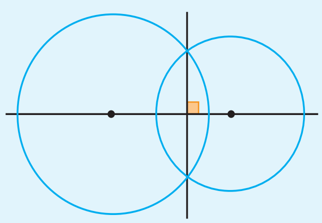
Se puede trazar una recta perpendicular desde un punto hacia una recta siguiendo los pasos que se detallan en la figura de abajo:



C

Para trazar una línea perpendicular desde un punto a una recta, se utilizan características de círculos que se intersectan.

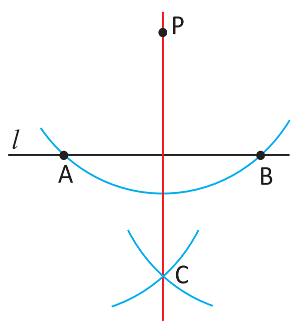
Recuerda que la recta que pasa por la intersección de dos circunferencias es perpendicular a la recta que une sus centros.



E

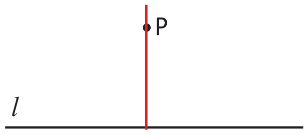
Otra forma de trazar rectas perpendiculares es:

1. Dibujar un punto P y una recta *l* como las del Problema inicial.
2. Dibujar una parte del círculo con centro en P y que cruce a la recta *l*. Se coloca A,B a los puntos donde se intersectan.
3. Dibujar dos círculos del mismo radio que tengan como centro A y B, respectivamente. Se coloca C en el punto donde se intersectan los dos círculos.
4. Trazar la recta PC.

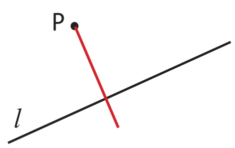


1. En cada uno de los siguientes literales traza la recta perpendicular desde el punto P hacia la recta *l*. Copia los segmentos en tu cuaderno.

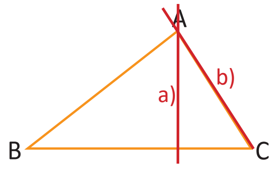
a)



b)



2. En el ΔABC traza una recta perpendicular:
   a) Desde el punto A hacia $\overline{BC}$.
   b) Desde el punto C hacia $\overline{AB}$.



Indicador de logro

2.4 Aplica características de dos círculos que se intersecan para trazar rectas perpendiculares.

Secuencia

En la clase 2.2 los estudiantes determinaron que dos círculos que se intersecan poseen algunas características, tales como la perpendicularidad del segmento que une sus centros y el segmento que une los puntos en las intersecciones de las circunferencias. También en la clase anterior los estudiantes dibujaron figuras planas utilizando regla y compás. Ahora se combinará lo aprendido en las clases antes mencionadas, para trazar rectas perpendiculares con regla y compás guiándose por el hecho de que la recta que se dibujará pasa por el segmento que une los puntos de las intersecciones de las circunferencias.

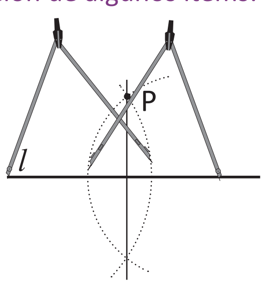
Propósito

Ⓟ Construir una recta perpendicular a la recta l utilizando las características de círculos que se intersecan. En este punto es adecuado recordar a los estudiantes que la recta que pasa por la intersección de dos circunferencias es perpendicular al segmento que une sus centros, a manera de aclaración, es igualmente válido decir que la recta que pasa por la intersección de dos circunferencias es perpendicular a la recta que pasa por los centros de las circunferencias. La selección de la ubicación del punto B es arbitraria, es decir, puede ser cualquiera en la recta, lo importante es que sea el centro de una circunferencia que pase por P, sin importar si los dos círculos intersecados tienen radios diferentes.

Ⓢ Construir una recta perpendicular a la recta l, que pase por P; en este procedimiento siempre se utilizan las propiedades de círculos que se intersecan, con la diferencia de que a través de este proceso se asegura que los dos círculos tengan igual radio.

Solución de algunos ítems:

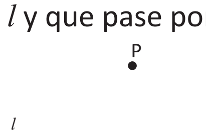
1. a)



Al desarrollar la clase y realizar el plan pizarra, los pasos descritos en Ⓢ y Ⓔ pueden hacerse sobre una misma figura.

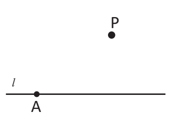
Fecha: **U8 2.4**

Ⓟ Con regla y compás, traza una recta perpendicular a la recta l y que pase por P.

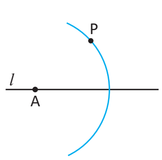


Ⓢ

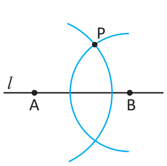
a)



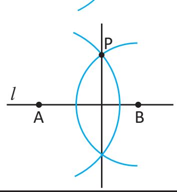
b)



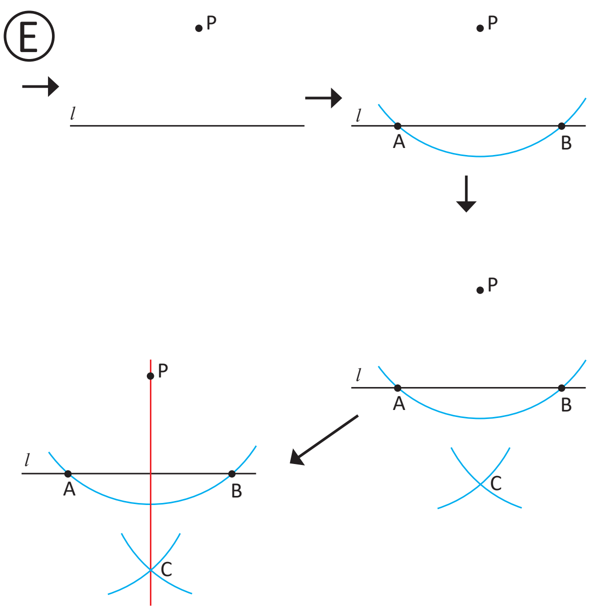
c)



d)

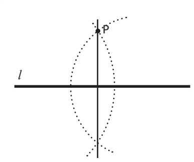


Ⓔ



Ⓡ

1.

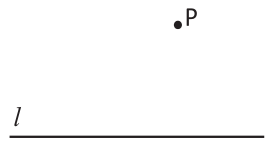


Tarea: página 171 del Cuaderno de Ejercicios.

2.5 Distancia entre un punto y una línea recta

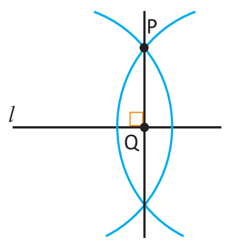
P

Se le llama **distancia entre un punto y una recta** a la longitud de la perpendicular del punto a la recta. Copia la ilustración en tu cuaderno y traza la distancia entre el punto P y la recta l.



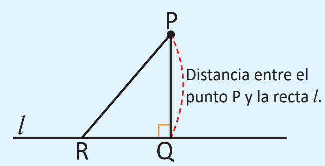
S

Al aplicar el procedimiento para trazar una perpendicular de un punto a una recta, visto en la clase anterior, se obtiene la distancia PQ entre el punto y la recta.

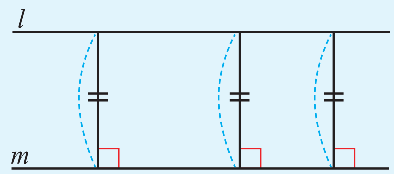


C

Si desde el punto P, que se ubica fuera de la recta l, se traza una perpendicular a la recta l y se establece como Q el punto de corte, a la longitud del segmento $\overline{PQ}$ se le llama: **distancia entre el punto P y la línea recta l**. La distancia es la menor de las longitudes del segmento que une el punto P y la recta l. Por ejemplo, en la ilustración PQ < PR.

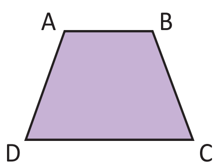


Si hay dos rectas paralelas l y m, para cualquier punto que se tome de la recta l la distancia con la recta m es constante.



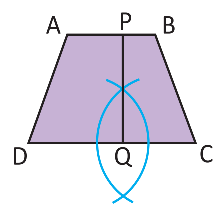
E

Para el trapecio ABCD traza la distancia entre la base mayor y la base menor.

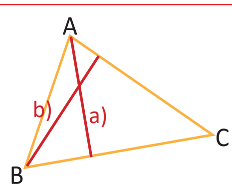


Solución.

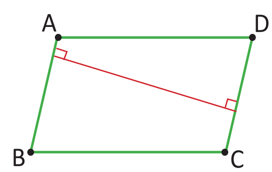
Como la base mayor y menor de un trapecio son paralelas, se puede tomar cualquier segmento perpendicular a las bases. PQ es la distancia.



1. En el triángulo ABC encuentra la distancia que hay:
   a) Entre A y $\overline{BC}$.
   b) Entre B y $\overline{AC}$.



2. En el paralelogramo ABCD, encuentra la medida de la distancia entre $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$.



Indicador de logro

2.5 Determina la distancia entre un punto y una recta y la distancia entre rectas paralelas.

Secuencia

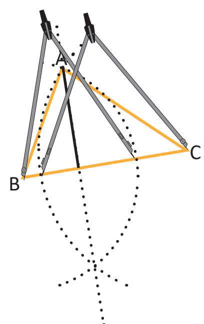
Anteriormente se trabajó, utilizando regla y compás, la forma en que se traza una recta que pasa por un punto determinado y es perpendicular a otra. Basado en esto, ahora se define la distancia de un punto a una recta, de modo que el estudiante utilice lo aprendido en la clase anterior. Análogamente se establece que el segmento que representa la distancia entre dos rectas paralelas es perpendicular a ellas y por tanto constante, desde cualquier punto.

Propósito

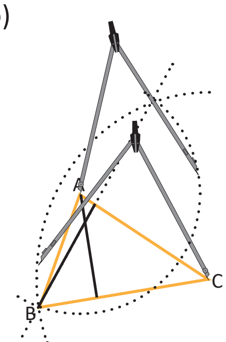
Ⓟ Establecer que a la longitud del segmento que une un punto y una recta y que es perpendicular a la recta, se le llama distancia. Para determinar la distancia entre dos rectas paralelas se parte de la misma idea, es decir, se elige cualquier punto que esté sobre una de las rectas y se determina la distancia desde ese punto hacia la otra recta. Se debe destacar que el procedimiento para determinar la distancia entre un punto y un segmento o entre dos segmentos es el mismo que cuando se trabaja con rectas.

Solución de algunos ítems:

1. a)

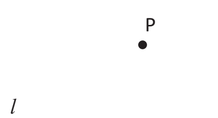


b)

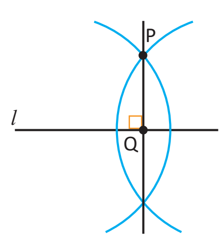


Fecha: **U8 2.5**

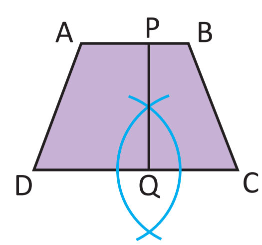
Ⓟ Se le llama distancia entre un punto y una recta a la longitud de la perpendicular del punto a la recta. Traza la distancia entre el punto P y la recta *l*.



Ⓢ Al aplicar el procedimiento para trazar una perpendicular de un punto a una recta, se obtiene la distancia PQ entre el punto y la recta.

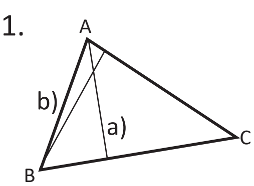


Ⓔ



Como la base mayor y menor de un trapecio son paralelas se puede tomar cualquier segmento perpendicular a las bases. $\overline{PQ}$ es la distancia.

Ⓡ 1.

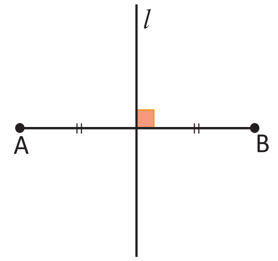


Tarea: página 172 del Cuaderno de Ejercicios.

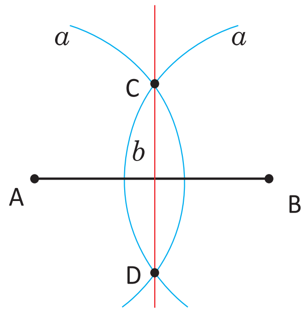
2.6 Mediatriz de un segmento

P

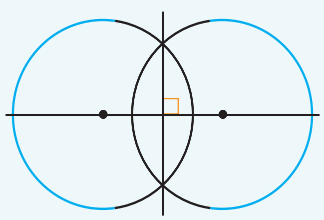
La recta que intersecta a un segmento formando un ángulo de 90° y lo divide en dos partes iguales se llama **mediatriz de un segmento**. Además, la mediatriz de $\overline{AB}$ es su eje de simetría y los puntos A y B son los puntos correspondientes. Así en el dibujo, la recta l es la mediatriz de $\overline{AB}$.



Se ha trazado la mediatriz de $\overline{AB}$, siguiendo los pasos a y b utilizando regla y compás. Explica esta forma de trazar la mediatriz.



Recuerda la forma en que se trazan rectas perpendiculares.



S

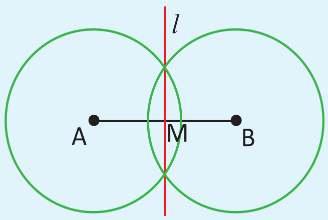
Para dibujar la mediatriz de $\overline{AB}$, se pueden dibujar dos círculos del mismo radio cuyos centros sean los puntos A y B, establecer las intersecciones de los círculos como C y D; luego, trazando la recta que pasa por CD, se obtiene la mediatriz del segmento.

Se debe recordar que dos círculos que se intersectan son simétricos respecto a la recta o eje que pasa por los centros de ellos. Además, cuando los radios de los dos círculos tienen la misma longitud, la figura de dos círculos también es simétrica, por la línea que pasa por los dos puntos de intersección.

C

Considerando el procedimiento anterior de trazar la mediatriz, se pueden hacer las siguientes conclusiones.

a) Dado que los círculos poseen el mismo radio, la recta l es un eje de simetría. Además, $l \perp \overline{AB}$.
b) El punto B puede sobreponerse perfectamente sobre el punto A, luego AM = BM.

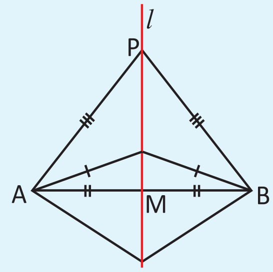


C

Si se establece un punto P sobre la mediatriz de $\overline{AB}$ y se dobla el dibujo por la recta l, entonces $\overline{PA}$ se sobrepone en $\overline{PB}$.

Por tanto, PA = PB.

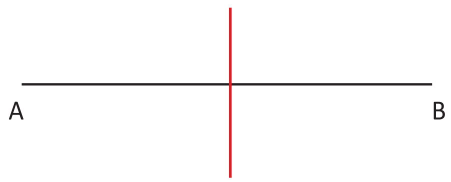
Además, todo punto ubicado en la mediatriz de un segmento equidista de los puntos A y B.



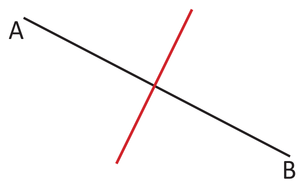
El término equidista es equivalente a decir "está a la misma distancia".

1. Dibuja la mediatriz del segmento AB.

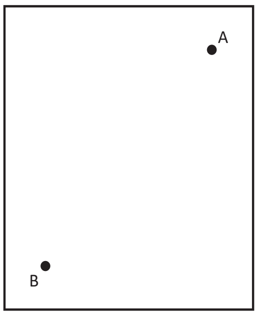
a)



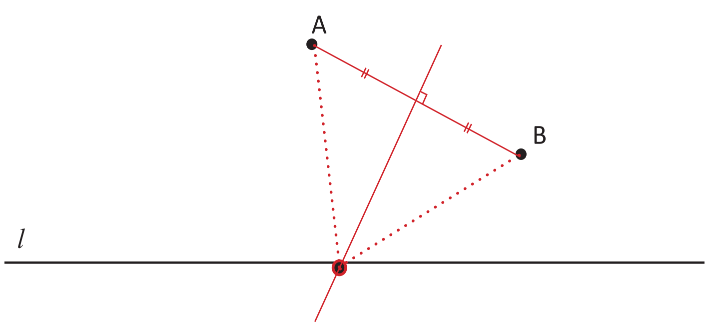
b)



En una página escribe los puntos A y B, traza el segmento AB y dobla la figura, de forma que los puntos A y B se sobrepongan exactamente. Dibuja la recta que se forma en la línea de doblez y marca como M el punto de intersección de las rectas y observa que se forma un ángulo recto; en la intersección de las dos rectas y los segmentos MA y BM miden igual.



2. Encuentra en el dibujo el punto sobre la recta l que tenga la misma distancia desde el punto A y desde el punto B.



Indicador de logro

2.6 Dibuja la mediatriz de un segmento aplicando las características de dos círculos que se intersecan.

Secuencia

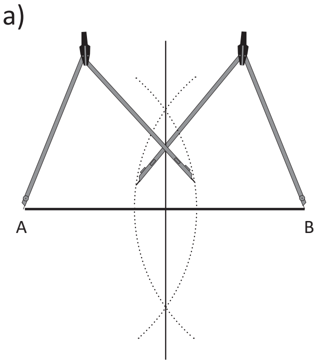
La construcción de la mediatriz resulta de la intersección de dos círculos con igual radio, es decir, la mediatriz coincide con el segmento que une los dos puntos de intersección de las circunferencias. También se aprovecha para establecer que todo punto ubicado en la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del mismo.

Propósito

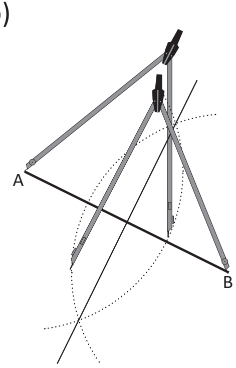
Ⓟ Establecer que la mediatriz es una recta que coincide con el segmento que une los puntos en los que las circunferencias con igual radio se intersecan. Se debe destacar que la mediatriz se encuentra en el punto medio del segmento ya que viene a ser un eje de simetría de los círculos (con igual radio) intersecados a partir de los cuales se construyó.

Solución de algunos ítems:

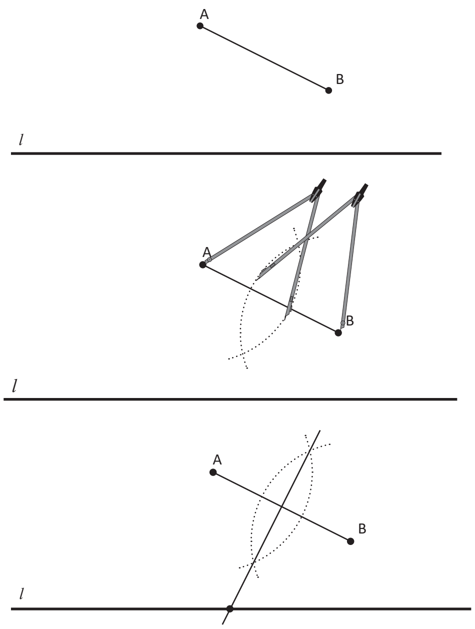
1. a)



b)



2.



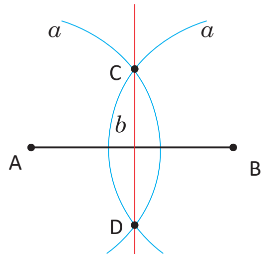
Todo punto sobre la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del segmento. Como el punto de intersección N está sobre la mediatriz y la recta l, entonces ese punto sobre la recta l equidista de A y B.

Fecha:

U8 2.6

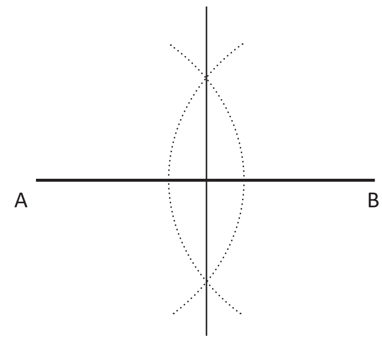
Ⓟ La recta perpendicular a un segmento que lo divide en dos partes iguales se llama **mediatriz**. La mediatriz es el eje de simetría del segmento.

Explica la forma de trazar una mediatriz, según los pasos.



Ⓢ Se dibujan dos círculos del mismo radio cuyos centros son A y B, y las intersecciones de las circunferencias C y D; luego, se traza la recta que pasa por C y D, obteniéndose la mediatriz del segmento.

Ⓡ 1. a

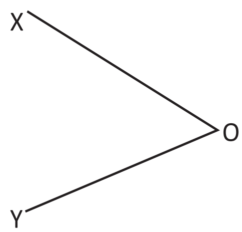


Tarea: página 173 del Cuaderno de Ejercicios.

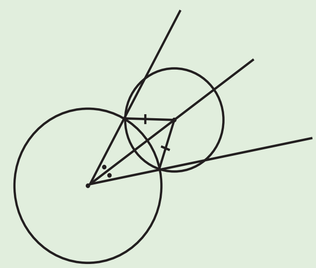
2.7 Bisectriz de un ángulo

P

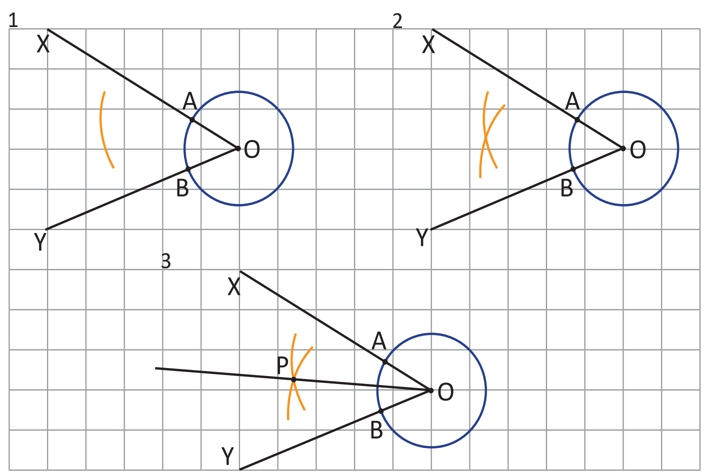
Para ∢XOY construye una semirrecta al interior del ángulo utilizando regla y compás, de tal manera que la semirecta divida al ángulo en dos ángulos iguales.



Dos círculos que se intersectan son simétricos respecto a la recta o eje que pasa por los centros de ambos círculos.



S

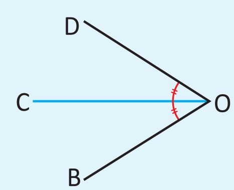


El compás se utiliza para trasladar distancias.

Paso 1. Trazar una circunferencia con centro en O y radio cualquiera, y marcar las intersecciones a los lados del ángulo con A y B.
Luego, con centro en A y radio cualquiera trazar un arco.
Paso 2. Con el mismo radio con que se trazó el arco en el paso 1, trazar un arco con centro en B.
Paso 3. Representar con P la intersección de ambos arcos. El punto P también es el centro de la otra circunferencia mencionada en el recordatorio (recuadro verde).

C

La semirecta que divide un ángulo en dos partes iguales se llama **bisectriz**.
También se puede decir que la bisectriz es el eje de simetría de ese ángulo.

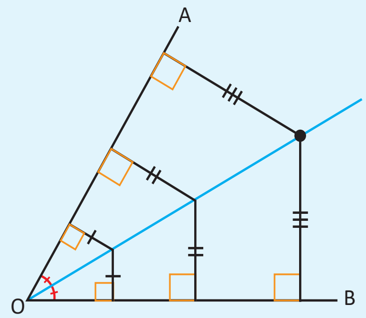


Por tanto, ∢DOC = ∢COB = $\frac{1}{2}$ ∢DOB.

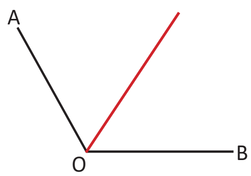
Los pasos para construir la bisectriz de un ángulo son:
1. Dibujar un círculo que tenga como centro el punto O. Establecer como A y B las intersecciones con los lados del ángulo y la circunferencia.
2. Dibujar dos arcos del mismo radio, tomando como sus centros A y B. Y a la intersección de las dos circunferencias nombrarlas con P.
3. Trazar la semirecta OP.

Dado que la bisectriz de ∢AOB es su eje de simetría, las distancias trazadas desde el punto P sobre la bisectriz a los lados del ángulo son iguales.

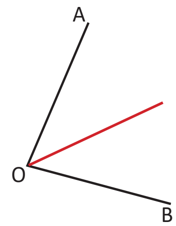
En general, todo punto ubicado sobre la bisectriz de un ángulo tiene igual distancia hacia los lados del ángulo. Así como se muestra en la imagen:



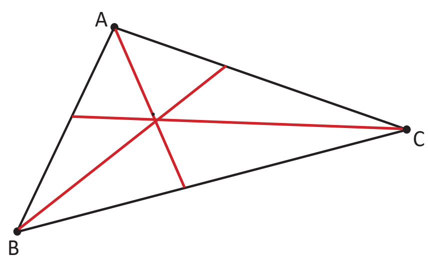
1. Encuentra la bisectriz del ángulo AOB en cada literal.
   a)



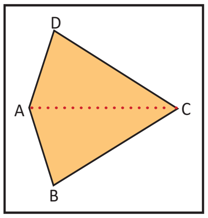
   b)



2. Traza las bisectrices de los ángulos del ΔABC.



3. En la figura:
   a) Dobla de tal forma que los lados $\overline{BC}$ y $\overline{DC}$ del cuadrilátero se sobrepongan.
   b) Marca con un lápiz la recta que forma el doblez.
   c) ¿Qué relación tienen los dos ángulos que se formaron con el doblez?



∢CAB = ∢CAD
∢ACB = ∢ACD

Unidad 8

Indicador de logro

2.7 Dibuja la bisectriz de un ángulo aplicando las características de dos círculos que se intersecan.

Secuencia

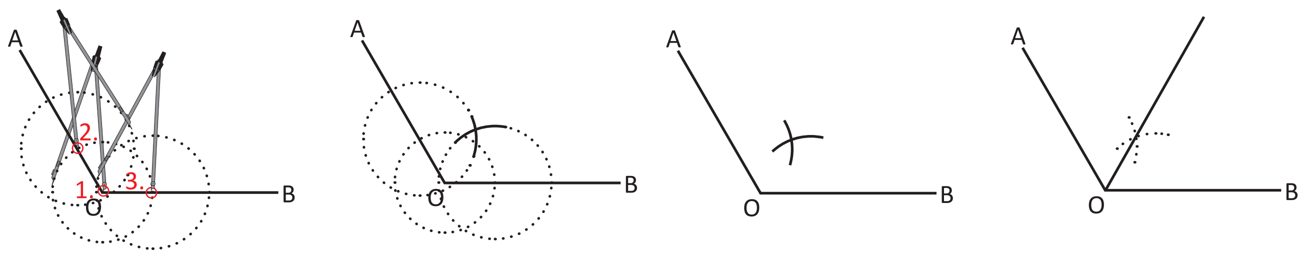
Para la construcción de la bisectriz de un ángulo se aplican las características de dos círculos que se intersecan. El uso de estas características para la construcción de la bisectriz consiste en el hecho de que es necesario construir dos círculos, para los cuales el centro del primero coincida con el vértice del ángulo y el centro del segundo sea la intersección de dos circunferencias auxiliares cuyos centros sean las intersecciones de la primera circunferencia con los lados del ángulo.

Propósito

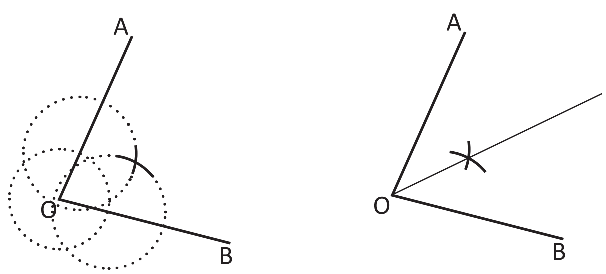
Ⓟ Determinar que la semirrecta que inicia del centro del primer círculo y pasa por el centro del segundo será la bisectriz del ángulo. Esto es así porque dicha semirrecta coincide con la recta que representa un eje de simetría para los dos círculos intersecados, de manera que lo que se encuentra por arriba de este eje es idéntico a lo que se encuentra por debajo. Por tanto es importante hacer énfasis en que la bisectriz es un eje de simetría por lo que todo punto sobre ella equidista (está a la misma distancia) de los lados del ángulo.

Solución de algunos ítems:

1. a)

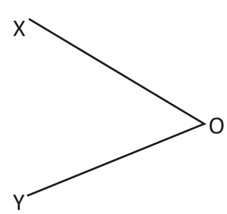


1. b)

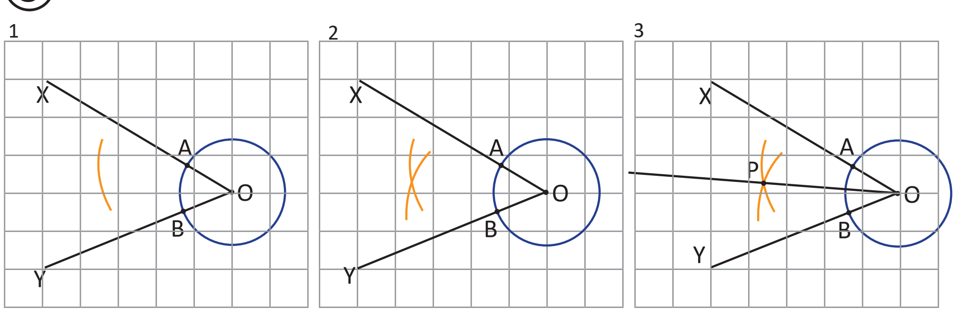


Fecha: **U8 2.7**

Ⓟ Para ∢XOY construye una semirrecta al interior del ángulo utilizando regla y compás, de tal manera que la semirrecta divida al ángulo en dos ángulos iguales.

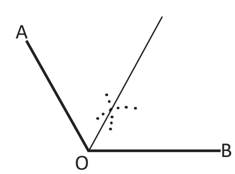


Ⓢ

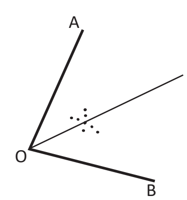


Ⓡ

1. a)



b)

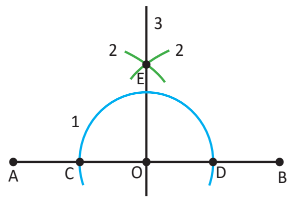


Tarea: página 174 del Cuaderno de Ejercicios.

2.8 Tangente a una circunferencia

P

La imagen muestra cómo se puede trazar una recta perpendicular a la recta AB pasando por el punto O.



a) Explica los pasos utilizados para trazar la recta que pasa por OE.
b) Explica la razón por la que la recta que pasa por OE es perpendicular a $\overline{AB}$.

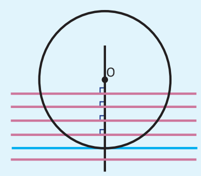
S

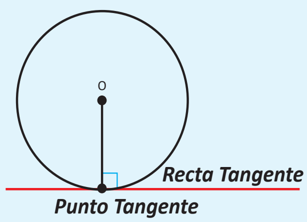
a) Se observan tres pasos:
1. Dibujar un círculo con centro en O y establecer los puntos C y D.
2. Dibujar dos círculos con el mismo radio y que tengan como centros los puntos C y D, luego marcar sus intersecciones como E.
3. Trazar la recta que pasa por EO.

b) Si se considera $\overline{AB}$ como un ángulo de 180°, la recta que pasa por OE es bisectriz del ángulo. Por tanto, $\measuredangle AOE = 90°$.

C

Al mover la línea perpendicular a la recta, que pasa por el centro del círculo O, hay un momento en el que la recta tiene solo un punto común con la circunferencia.

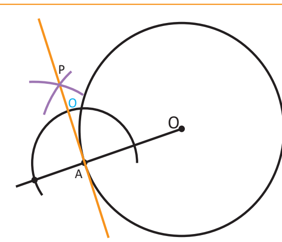




En ese momento, se dice que esa recta es tangencial al círculo, y a esta línea se le llama **recta tangente** al círculo y el único punto que la recta tiene en común con la circunferencia se le llama **punto de tangencia** y es perpendicular al radio.

E

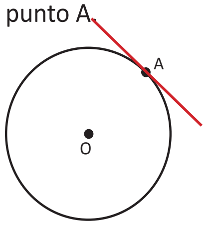
En la imagen se ha trazado la recta tangente a la circunferencia cuyo punto de tangencia es A.



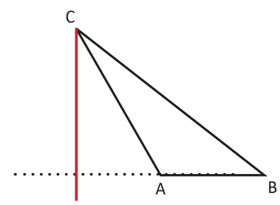
a) Explica los pasos utilizados para trazar la recta tangente.
b) Dibuja en tu cuaderno la recta tangente siguiendo los pasos.

Solución.
Se traza una circunferencia tomando como centro el punto A. Se dibujan dos arcos del mismo radio con sus centros en las intersecciones de la circunferencia, con la recta que pasa por OA. Se marca como P el punto de intersección entre los dos arcos. Se traza la recta AP, esta es la tangente al punto A.

1. Encuentra la recta tangente a la circunferencia en el punto A.



2. Traza la altura del ΔABC desde el punto C y tomando como base el segmento AB.



Indicador de logro

2.8 Dibuja una recta tangente a una circunferencia utilizando características de dos círculos que se intersecan.

Secuencia

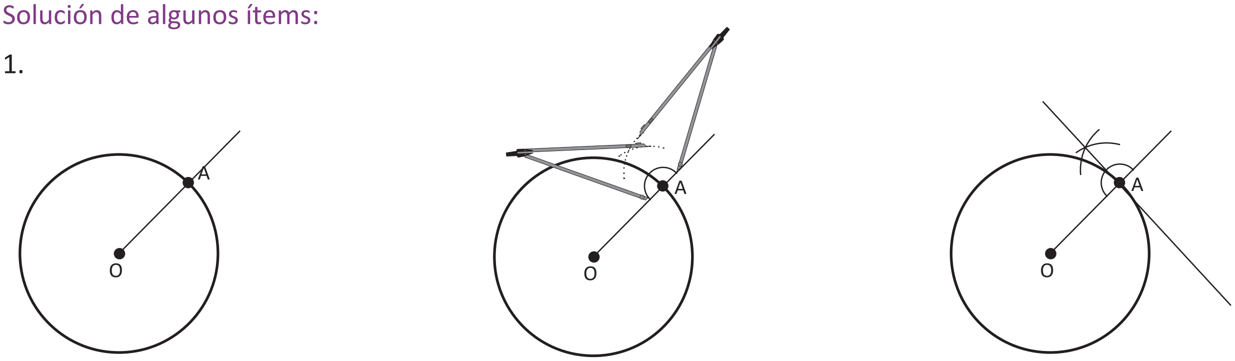
Para esta clase se aplican las características de círculos que se intersecan para la construcción de las rectas tangentes a una circunferencia, considerando que esta recta es perpendicular a la que pasa por el centro del círculo y el punto de intersección.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Determinar que en el caso de que un ángulo sea de 180° la bisectriz y la mediatriz coinciden. Se espera que el estudiante para desarrollar el Ⓟ de la clase determine en a) que se ha realizado el proceso para construir la mediatriz, y en b) que asocie el hecho de que la mediatriz representa un eje de simetría del segmento AB, lo cual coincide con que la bisectriz también es un eje de simetría del ángulo AOB, considerando al segmento AB como el ángulo llano AOB.

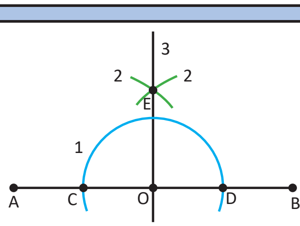
Solución de algunos ítems:

1.



Fecha: **U8 2.8**

Ⓟ Una recta perpendicular a la recta AB pasando por el punto O.



Explica:

a) Los pasos para trazar la recta que pasa por O y E.

b) La razón por la que la recta que pasa por O y E es perpendicular a $\overline{AB}$.

Ⓢ

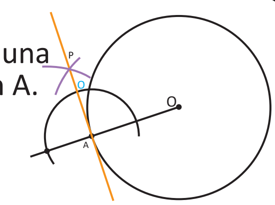
a) 1. Dibujar una circunferencia y nombrar con C y D sus intersecciones con el segmento.

2. Dibujar dos circunferencias con el mismo radio y que tengan como centros los puntos C y D, luego marcar sus intersecciones con E.

3. Trazar la recta que pasa por E y O.

b) Si se considera $\overline{AB}$ como un ángulo de 180°, la recta que pasa por O y E es bisectriz del ángulo. Por tanto, ∢AOE = 90°.

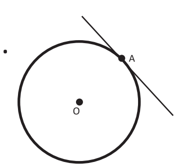
Ⓔ Pasos para trazar una recta tangente en A.



1. Trazar una circunferencia con centro en A.
2. Dibujar dos arcos del mismo radio con sus centros en las intersecciones de la circunferencia, con la semirrecta OA.
3. Marcar con P la intersección entre los dos arcos y trazar la recta AP.

Ⓡ

1.



Tarea: página 175 del Cuaderno de Ejercicios.

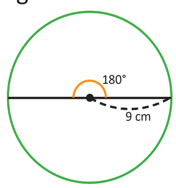
Lección 2

2.9 Longitud de arco de un sector circular

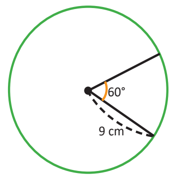
P

La longitud de la circunferencia cuyo radio es de 9 cm, se puede calcular de la siguiente forma: $l = 2\pi \times 9 = 18\pi$. Pensando en la misma circunferencia, y aplicando regla de tres simple directa, resuelve los siguientes numerales.

1. Calcula la longitud del arco sostenido por un ángulo de 180°.



2. Calcula la longitud del arco sostenido por un ángulo de 60°.



La longitud de la circunferencia se calcula como: $l = 2\pi r$.

Donde r es el radio del círculo y $\pi = 3.14159...$

S

Como la circunferencia tiene 360° se puede plantear la siguiente regla de tres simple directa, para realizar lo que se pide en cada uno de los literales.

1.

Longitud	l	18π
Ángulo	180°	360°

$$l : 180 = 18\pi : 360$$
$$360l = 18\pi \times 180$$
$$l = 18\pi \times \frac{180}{360}$$
$$l = 18\pi \times \frac{\overset{1}{\cancel{180}}}{\underset{2}{\cancel{360}}}$$
$$l = 18\pi \times \frac{1}{2}$$
$$l = 9\pi$$

2.

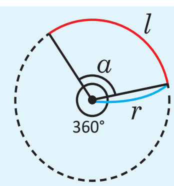
Longitud	l	18π
Ángulo	60°	360°

$$l : 60 = 18\pi : 360$$
$$360l = 18\pi \times 60$$
$$l = 18\pi \times \frac{60}{360}$$
$$l = 18\pi \times \frac{\overset{1}{\cancel{60}}}{\underset{6}{\cancel{360}}}$$
$$l = 18\pi \times \frac{1}{6}$$
$$l = 3\pi$$

C

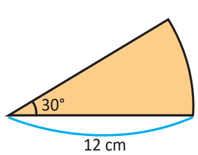
② Para encontrar la longitud de arco sostenido por un ángulo a, se debe multiplicar la razón entre los ángulos por la longitud de la circunferencia.

Longitud de arco de una circunferencia: $l = 2\pi r \times \frac{a}{360}$.



E

Calcula la longitud de un arco sostenido por un ángulo de 30° y un radio de 12 cm.

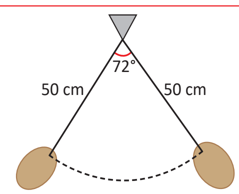


Solución.

En el problema: $a = 30°$ y $r = 12$.

La longitud del arco es: $l = 2\pi \times 12 \times \frac{30}{360} = 2\pi \times 12 \times \frac{1}{12} = 2\pi$.

1. Calcula la longitud del arco correspondiente a un ángulo central de 45° y un radio de 4 cm.
   Longitud de arco: π
2. El péndulo de un reloj mide 50 cm al balancearse forma un ángulo de 72°. ¿Cuánto mide el arco que describe el péndulo?
   Longitud de arco: 20π



Indicador de logro

2.9 Calcula la longitud del arco de un sector circular.

Secuencia

Los estudiantes en sexto grado aprendieron a calcular la longitud de una circunferencia y análogamente la longitud de un sector circular. Este último se retoma en esta clase con la diferencia de que a partir de ahora se llamará longitud de arco de un sector circular. Para el cálculo de la longitud de arco se presentará a los estudiantes la fórmula: $l = 2\pi r \times \frac{a}{360}$ que se deduce utilizando la regla de tres simple directa aprendida en la unidad 6.

Solución de algunos ítems:

1. Datos del problema: $a = 45°$ y $r = 4$
   El área del sector circular es:

$$\begin{aligned} l &= 2\pi \times 4 \times \tfrac{45}{360} \\ &= 2\pi \times 4 \times \tfrac{1}{8} \\ &= \pi \text{ cm} \end{aligned}$$

2. Datos del problema: $a = 72°$ y $r = 50$
   El área del sector circular es:

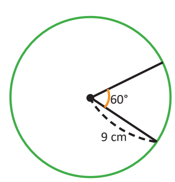
$$\begin{aligned} l &= 2\pi \times 50 \times \tfrac{72}{360} \\ &= 2\pi \times 50 \times \tfrac{1}{5} \\ &= 20\pi \text{ cm} \end{aligned}$$

Fecha: **U8 2.9**

Ⓟ La longitud de la circunferencia cuyo radio es de 9 cm, se puede calcular de la siguiente forma:
$l = 2\pi \times 9 = 18\pi$. Pensando en la misma circunferencia y aplicando regla de tres simple directa, calcula la longitud del arco sostenido por un ángulo de

1. 180°

2. 60°



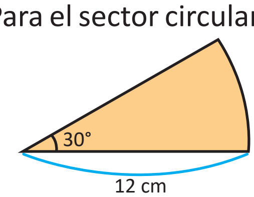
Ⓢ 1. $l : 180 = 18\pi : 360$

$$\begin{aligned} 360l &= 18\pi \times 180 \\ l &= 18\pi \times \tfrac{180}{360} \\ l &= 18\pi \times \tfrac{1}{2} \\ l &= 9\pi \text{ cm} \end{aligned}$$

2. $l : 60 = 18\pi : 360$

$$\begin{aligned} 360l &= 18\pi \times 60 \\ l &= 18\pi \times \tfrac{60}{360} \\ l &= 18\pi \times \tfrac{1}{6} \\ l &= 3\pi \text{ cm} \end{aligned}$$

Ⓔ Para el sector circular:



La longitud del arco es:

$$\begin{aligned} l &= 2\pi \times 12 \times \tfrac{30}{360} \\ &= 2\pi \times 12 \times \tfrac{1}{12} \\ &= 2\pi \text{ cm} \end{aligned}$$

Ⓡ 1. π cm
2. 20π cm

Tarea: página 176 del Cuaderno de Ejercicios.

2.10 Área de un sector circular

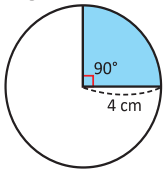
P

El área de un círculo cuyo radio es 4 cm se puede calcular de la siguiente forma:

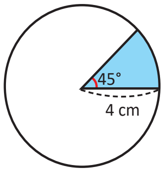
$$A = \pi \times 4 \times 4 = 4^2\pi = 16\pi$$

Pensando en un círculo del mismo radio, realiza los siguientes numerales:

1. Calcula el área del sector circular determinado por un ángulo de 90°.



2. Calcula el área del sector circular determinado por un ángulo de 45°.



El área del círculo se calcula como: $\mathbf{A} = \pi \times r^2$. Donde r es el radio del círculo y π = **3.14159**...

S

Como la circunferencia tiene 360° se puede plantear la siguiente regla de tres simple directa, para realizar lo que se pide en cada uno de los literales.

1.

Área	S	16π
Ángulo	90°	360°

$S : 90 = 16\pi : 360$

$360S = 16\pi \times 90$

$S = 16\pi \times \frac{90}{360}$

$S = 16\pi \times \frac{\cancel{90}^{1}}{\cancel{360}_{4}}$

$S = 16\pi \times \frac{1}{4}$

$S = 4\pi$

2.

Área	S	16π
Ángulo	45°	360°

$S : 45 = 16\pi : 360$

$360S = 16\pi \times 45$

$S = 16\pi \times \frac{45}{360}$

$S = 16\pi \times \frac{\cancel{45}^{1}}{\cancel{360}_{8}}$

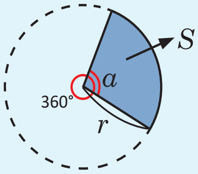
$S = 16\pi \times \frac{1}{8}$

$S = 2\pi$

C

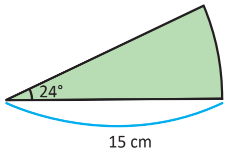
Para encontrar el área de un sector circular, se debe multiplicar la razón entre los ángulos por el área del círculo.

Área del sector circular: $S = \pi r^2 \times \frac{a}{360}$



E

Calcula el área del sector circular determinado por un ángulo de 24° y un radio de 15 cm.



Solución.

Datos del problema: a = 24° y r = 15

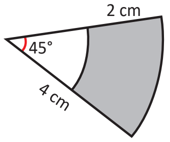
El área del sector circular es: $S = \pi \times 15^2 \times \frac{24}{360} = \pi \times 15^2 \times \frac{1}{15} = 15\pi$

1. Encuentra el área del sector circular correspondiente a un ángulo central de 120° y un radio de 9 cm.

   Área del sector círcular: 27π

2. Encuentra el área del sector sombreado en la siguiente figura:

   Área del sector círcular: $\frac{3}{2}\pi$



Indicador de logro

2.10 Calcula el área de un sector circular.

Secuencia

En sexto grado los estudiantes aprendieron a calcular el área del círculo y de sectores circulares notables; en esta clase se retoma el tema del área de un sector circular, y se le presenta a los estudiantes la fórmula: $S = \pi r^2 \times \frac{a}{360}$.

Para deducirla se hace igual que en el caso de la longitud de arco del sector circular, utilizando la regla de tres simple directa.

Propósito

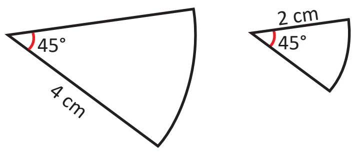
Ⓟ, Ⓢ Determinar que en el caso de que un ángulo sea de 180° la bisectriz y la mediatriz coinciden. Se espera que el estudiante para desarrollar el Ⓟ de la clase determine en a) que se ha realizado el proceso para construir la mediatriz, y en b) que asocie el hecho de que la mediatriz representa un eje de simetría del segmento AB, lo cual coincide con que la bisectriz también es un eje de simetría del ángulo AOB, considerando al segmento AB como el ángulo llano AOB.

Solución de algunos ítems:

1. Datos del problema: $a = 120°$ y $r = 9$
   El área del sector circular es:

$$S = \pi \times 9^2 \times \frac{120}{360}$$
$$= \pi \times 9^2 \times \frac{1}{3}$$
$$= 27\pi \text{ cm}^2$$

2. Para realizar este problema se debe calcular el área del sector circular de mayor radio y luego restar el área del sector con menor radio.



Área del sector circular más grande.
Datos: $a = 45°$ y $r = 4$
El área del sector circular es:

$$S = \pi \times 4^2 \times \frac{45}{360}$$
$$= \pi \times 4^2 \times \frac{1}{8}$$
$$= 2\pi$$

Área del sector circular más pequeño.
Datos: $a = 45°$ y $r = 2$
El área del sector circular es:

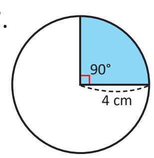
$$S = \pi \times 2^2 \times \frac{45}{360}$$
$$= \pi \times 2^2 \times \frac{1}{8}$$
$$= \frac{1}{2}\pi$$

El área sombreada es:
$2\pi - \frac{1}{2}\pi = \frac{3}{2}\pi$ cm^2

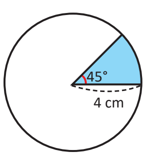
Fecha: **U8 2.10**

Ⓟ El área de un círculo cuyo radio es 4 cm se puede calcular de la siguiente forma:
$A = \pi \times 4 \times 4 = 4^2\pi = 16\pi$. Pensando en un círculo del mismo radio, calcula el área del sector circular determinado por un ángulo de:

1. 90°.



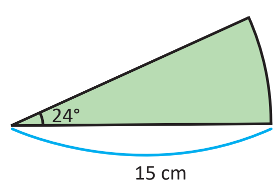
2. 45°.



Ⓢ 1. $S : 90 = 16\pi : 360$
$360S = 16\pi \times 90$
$S = 16\pi \times \frac{90}{360}$
$S = 16\pi \times \frac{1}{4}$
$S = 4\pi$ cm^2

2. $S : 45 = 16\pi : 360$
$360S = 16\pi \times 45$
$S = 16\pi \times \frac{45}{360}$
$S = 16\pi \times \frac{1}{8}$
$S = 2\pi$ cm^2

Ⓔ Para el sector circular:



El área del sector circular es:
$$S = \pi \times 15^2 \times \frac{24}{360}$$
$$= \pi \times 15^2 \times \frac{1}{15}$$
$$= 15\pi \text{ cm}^2$$

Ⓡ 1. 27π cm^2
2. $\frac{3}{2}\pi$ cm^2

Tarea: página 177 del Cuaderno de Ejercicios.

2.11 Incentro de un triángulo

P

En la imagen 1, el punto P dista lo mismo de los lados del triángulo. En la imagen 2, encuentra el punto P que dista lo mismo de los lados del triángulo y comprueba, que ese punto, es el centro de la circunferencia que es tangente a los tres lados del triángulo.

Imagen 1

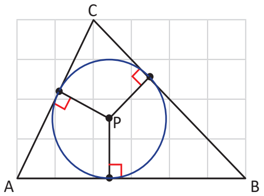
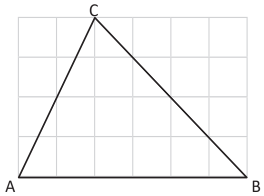


Imagen 2

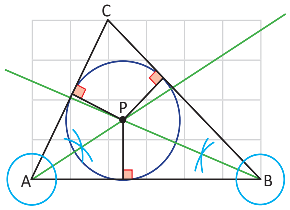


Utiliza la propiedad que indica que todo punto ubicado sobre la bisectriz de un ángulo tiene igual distancia hacia los lados del ángulo.

S

Se traza la bisectriz del ángulo ABC, también se traza la bisectriz del ángulo CAB, sea P la intersección de las dos bisectrices.

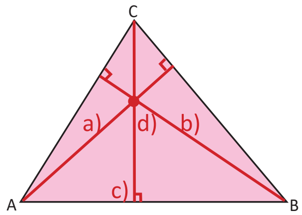
Este punto P cumple que está a igual distancia de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ por estar sobre la bisectriz del ∢ABC, también cumple estar a igual distancia de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ por estar sobre la bisectriz del ∢CAB. Por tanto, P está a igual distancia de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$. El punto P también está sobre la bisectriz de ∢BCA por estar a igual distancia de $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.

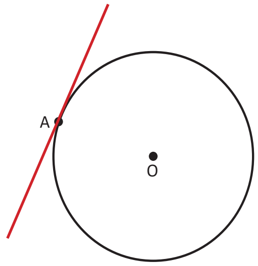


C

En el problema desarrollado, el punto P se llama **incentro del triángulo**, cumple con ser la intersección de las tres bisectrices de un triángulo y es el centro de una circunferencia que está al interior del triángulo y es tangente a sus tres lados.

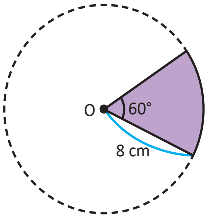
1. En el ΔABC, considerando AB = 4 cm, BC = 3.5 cm y AC = 3 cm. En tu cuaderno traza las rectas perpendiculares desde:
   a) El punto A hacia el segmento $\overline{BC}$.
   b) El punto B hacia el segmento $\overline{AC}$.
   c) El punto C hacia el segmento $\overline{AB}$.
   d) Determina en incentro de ΔABC.





2. Encuentra la recta tangente a la circunferencia, en el punto A, utilizando compás y una regla.

3. Dado un sector circular de radio 8 cm y ángulo de 60°:
   a) Calcula la longitud de su arco. Longitud de arco: $\frac{8}{3}\pi$
   b) Calcula el área del sector circular. Área del sector circular: $\frac{32}{3}\pi$



Unidad 8

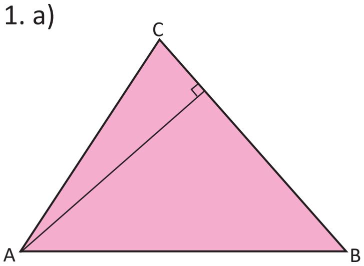
Indicador de logro

2.11 Determina el incentro de un triángulo.

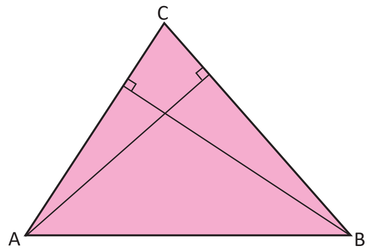
Secuencia

En la clase 2.7 de esta unidad se aprendió a trazar la bisectriz de un ángulo. En esta clase se trazan las tres bisectrices de los ángulos de un triángulo, para observar que el punto en donde se cortan las bisectrices se encuentra a igual distancia de los lados del triángulo. Una vez determinado lo anterior se dice que ese punto se llama **incentro** puesto que es el centro de una circunferencia inscrita al triángulo, es decir, tangente a sus tres lados.

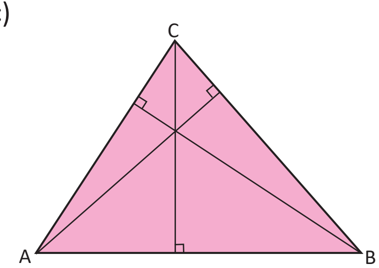
1. a)



b)

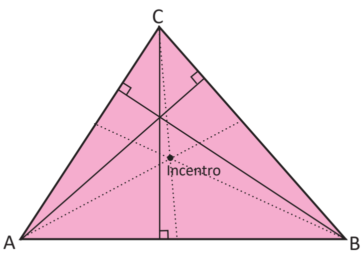


c)



Las tres rectas se intersecan en un punto.

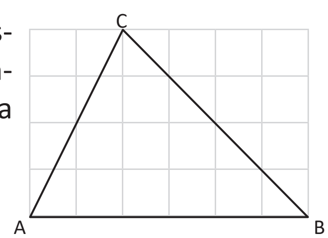
d)



Fecha: **U8 2.11**

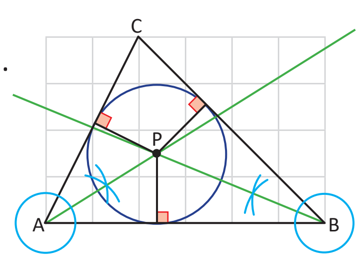
Ⓟ En la imagen 2, encuentra el punto P que dista lo mismo de los lados del triángulo y comprueba que es el centro de la circunferencia tangente a los tres lados del triángulo.

Imagen 2

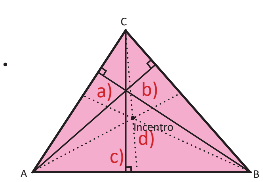


Ⓢ Se trazan las bisectrices de ∢ABC y ∢CAB.

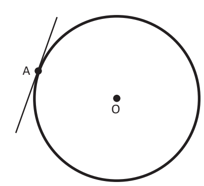
Sea P la intersección de las bisectrices.



Ⓡ 1.



2.



3. a) $\frac{8}{3}\pi$ cm

b) $\frac{32}{3}\pi$ cm^2

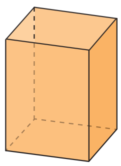
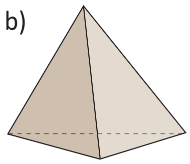
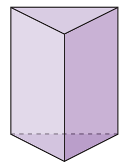
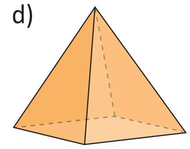
Tarea: página 178 del Cuaderno de Ejercicios.

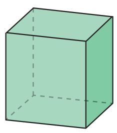
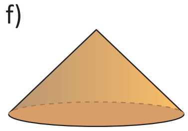
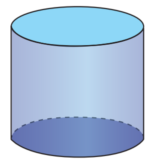
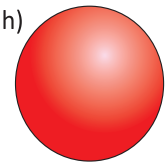
Lección 3 Planos, cuerpos geométricos, área total de prisma, pirámide y cilindro.

3.1 Clasificación de cuerpos geométricos

P

En los cuerpos geométricos se entiende como **cara** tanto las caras laterales como las bases. En las figuras del literal a) hasta el literal h) se observan algunos cuerpos geométricos.

a) 
b) 
c) 
d) 

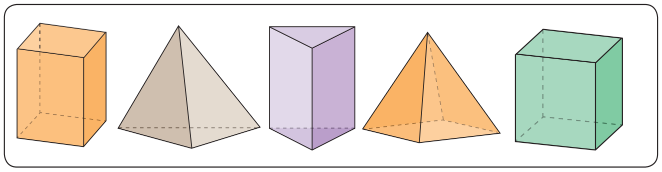
e) 
f) 
g) 
h) 

Clasifica los cuerpos geométricos según las similitudes de sus caras.

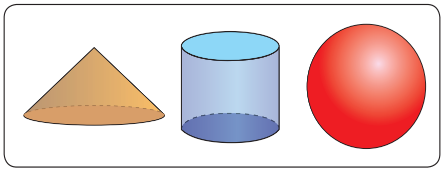
S

Se hace la siguiente clasificación de las figuras desde a) hasta h).

1.



2.



C

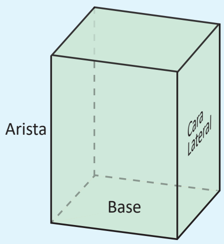
Las figuras de a) hasta d) del grupo 1 son llamadas **poliedros**, la característica de estos cuerpos es que sus caras son figuras planas, por lo general polígonos, como rectángulos o triángulos.

> La palabra **poliedro** viene de las raíces griegas: πολύς (polys), “muchas” y de έδρα (edra), “base”, “caras”.

Dentro de estas, las figuras como a) y c) cuyas caras laterales son rectángulos, son llamadas **prismas**. Las figuras como b) y d), cuyas caras laterales son triángulos, reciben el nombre especial de **pirámides**. Si además, el prisma tiene todos sus lados iguales, se le llama **cubo**.

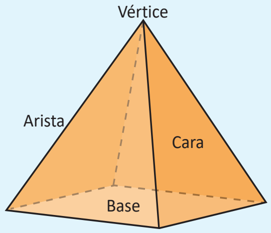
Las figuras desde f) hasta h) cuyas caras laterales son curvas, reciben el nombre de **cuerpos redondos**. En las imágenes de abajo se pueden observar los elementos de algunos cuerpos geométricos, a) es un prisma cuadrangular, b) es una pirámide de base rectangular, c) es un cilindro y d) es un cono.

a)



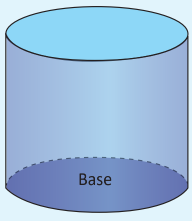
Prisma rectangular

b)



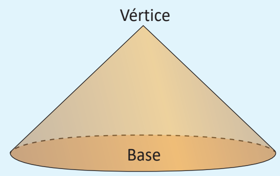
Pirámide rectangular

c)



Cilindro

d)

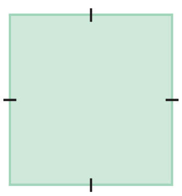


Cono

E

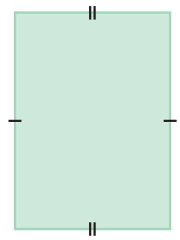
De la imagen anterior, se pueden obtener las figuras planas que conforman la base y las caras laterales del prisma y la pirámide, se resume a continuación.

Base del prisma mostrado en el literal a).



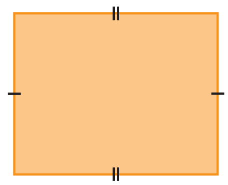
Cuadrado

Cara lateral del prisma mostrado en el literal a).



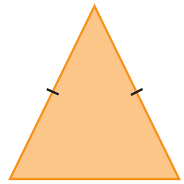
Rectángulo

Base de la pirámide mostrada en el literal b).



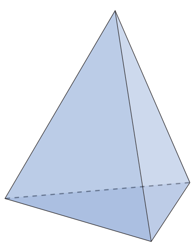
Rectángulo

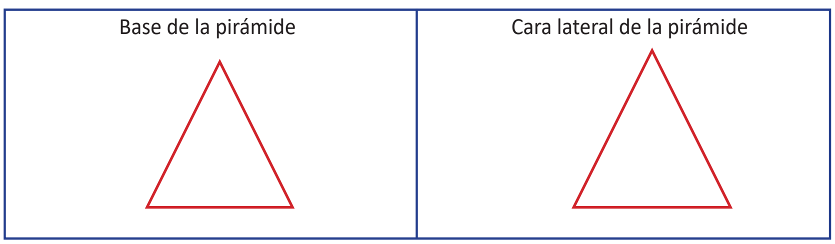
Cara lateral de la pirámide mostrada en el literal b).

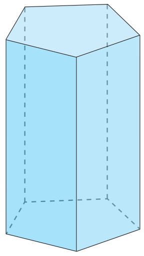


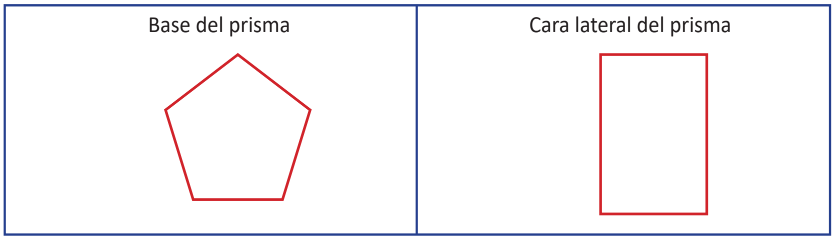
Triángulo isósceles

1. Al igual que en el ejemplo anterior, dibuja las figuras planas que conforman el siguiente prisma y pirámide.

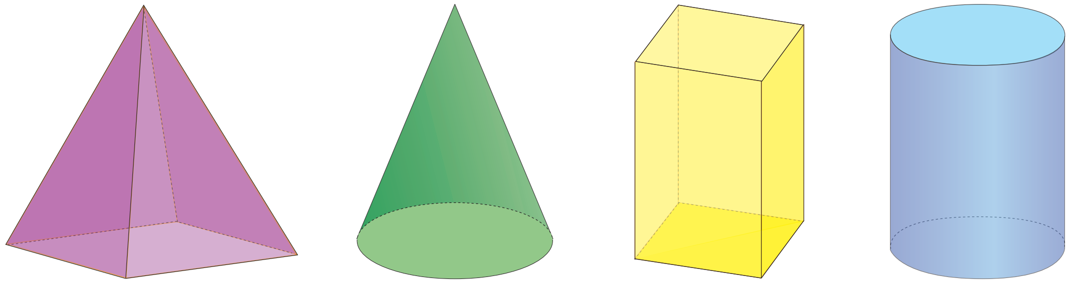








2. Observando los elementos de las imágenes presentadas:
   a) Menciona las diferencias entre pirámide y cono.
   b) Menciona las diferencias entre prisma y cilindro.



a) En una pirámide la base es un polígono. En el cono la base siempre es un círculo.
b) En una prisma la base es un polígono. En el cilindro la base siempre es un círculo.

Indicador de logro

3.1 Clasifica cuerpos geométricos según sus características.

Secuencia

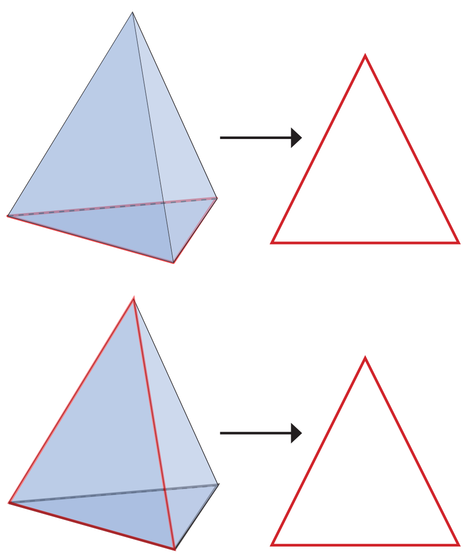
En grados anteriores se caracterizaron los cuerpos geométricos y se clasificaron según sus características en prismas, pirámides, conos y cilindros. Para esta clase se retoma el tema de clasificación de cuerpos geométricos ampliando la clasificación a poliedros y cuerpos redondos.

Propósito

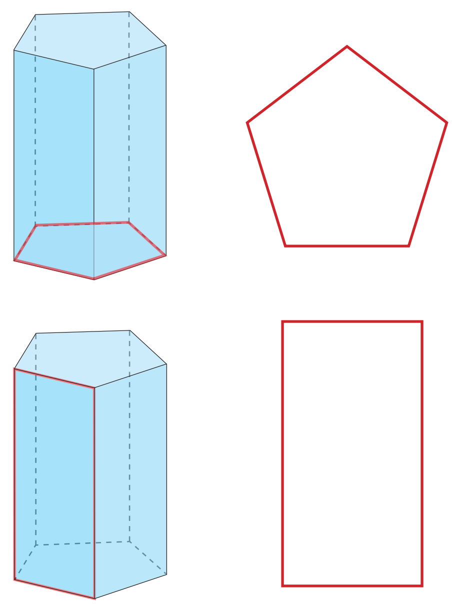
Ⓟ, Ⓢ Clasificar cuerpos geométricos según las características de sus caras. Se debe destacar que en los cuerpos geométricos se entienden como "caras" tanto las laterales como las bases.

Solución de algunos ítems:

1. a)

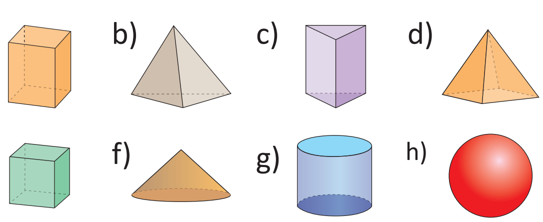


b)



Fecha: **U8 3.1**

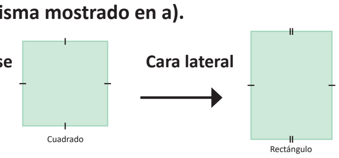
Ⓟ En los cuerpos geométricos se entiende como caras tanto las laterales como las bases. Clasifica los cuerpos geométricos del literal a) hasta el h) según las similitudes de sus caras.



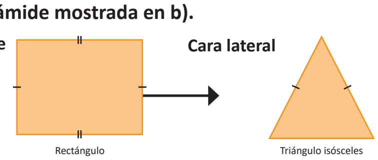
Ⓢ 1. a), b), c), d) y e)
2. f), g) y h)

Ⓔ Las figuras que conforman la base y las caras laterales del prisma y la pirámide son:

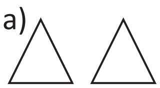
Prisma mostrado en a).



Pirámide mostrada en b).

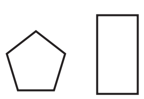


Ⓡ 1. a)



Base Cara lateral

b)



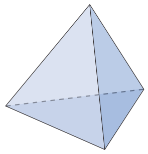
Base Cara lateral

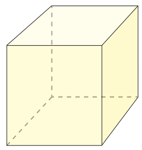
Tarea: página 179 del Cuaderno de Ejercicios.

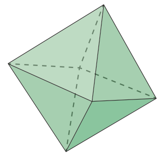
3.2 Características de poliedros regulares

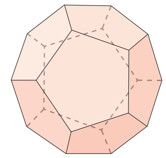
P

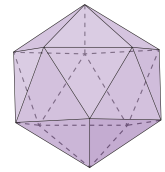
Observa los siguientes poliedros. Luego responde.


Tetraedro


Cubo


Octaedro


Dodecaedro


Icosaedro

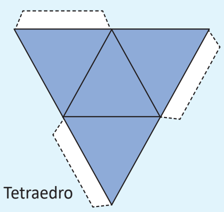
a) ¿Qué figuras forman las caras de la superficie de cada poliedro?
b) ¿Cuántas caras tiene cada poliedro?
c) ¿Qué característica es común en todos los poliedros?

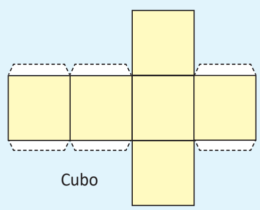
S

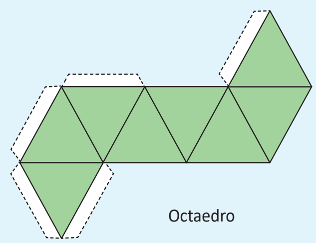
	Tetaedro	Cubo	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
a)	Triángulos	Cuadrados	Triángulos	Pentágonos	Triángulos
b)	4	6	8	12	20
c)	Están formados por caras que son polígonos regulares y todas las caras son congruentes entre sí.				

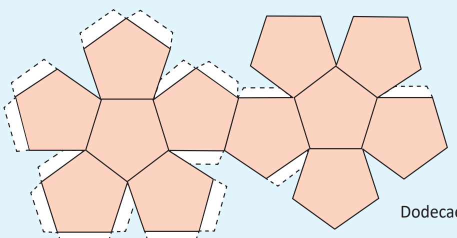
C

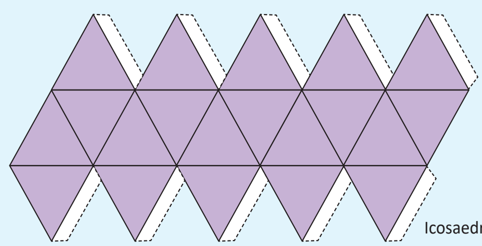
Un **poliedro regular** es el cuerpo geométrico en el cual todas sus caras son congruentes y son polígonos regulares. Se le llama plano desarrollado de un cuerpo geométrico, a la figura plana con la que se construyó el cuerpo geométrico. Ejemplo:


Tetraedro


Cubo


Octaedro

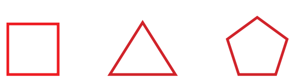

Dodecaedro


Icosaedro

1. Completa la siguiente tabla:

	Tetaedro	Cubo	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
Cara de la superficie	Triángulos equiláteros	Cuadrados	Triángulos equiláteros	Pentágonos regulares	Triángulos equiláteros
Número de caras	4	6	8	12	20
Número de vértices	4	8	6	20	12

2. Construye polígonos regulares.



Indicador de logro

3.2 Clasifica poliedros regulares por el número y la forma de las caras.

Secuencia

En la clase anterior se clasificaron los cuerpos geométricos en poliedros y cuerpos redondos. En esta clase se hace una subclasificación de los poliedros en poliedros regulares.

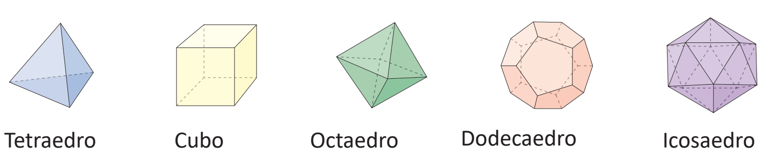
Propósito

Ⓟ Practicar lo desarrollado en clases. En el numeral 2 se pueden construir algunos polígonos regulares a manera de recordatorio; de preferencia los utilizados para construir los polígonos vistos en clase.

Fecha:

U8 3.2

Ⓟ Observa los siguientes poliedros. Luego responde.



Ⓢ

	Tetraedro	Cubo	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
a)	Triángulos	Cuadrados	Triángulos	Pentágono	Triángulos
b)	4	6	8	12	20

c) Están formados por caras que son polígonos regulares y todas las caras son congruentes entre sí.

Ⓡ

Cara:
Triángulo equilátero, cuadrado, triángulo equilátero, pentágono regular y triángulo equilátero
Número de caras:
4, 6, 8, 12 y 20
Número de vértices:
4, 8, 6, 20 y 12

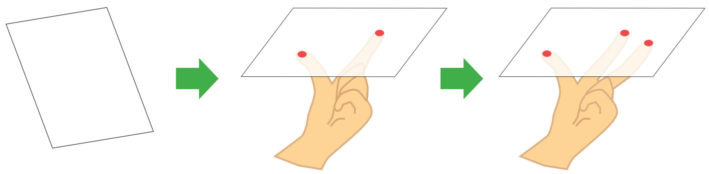
Tarea: página 181 del Cuaderno de Ejercicios.

3.3 Relación de posición entre rectas y planos

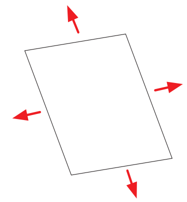
P

Toma una hoja de papel, ¿cómo se puede sostener una hoja de papel de forma estable, sin que haya un desbalance?

a) Intenta sostenerla utilizando únicamente dos dedos.
b) Intenta sostenerla utilizando tres dedos.
c) ¿Con cuál de las formas la hoja de papel es más estable?



Se puede tomar la idea de un plano como una hoja de papel, la cual se extiende indefinidamente, hacia los lados.



S

a) Si se toma con dos dedos la hoja de papel, queda siempre en desbalance.
b) Sin embargo, si se toma con tres dedos la hoja de papel queda firme, sin moverse.
c) Por tanto, una hoja de papel queda perfectamente sostenida utilizando tres dedos.

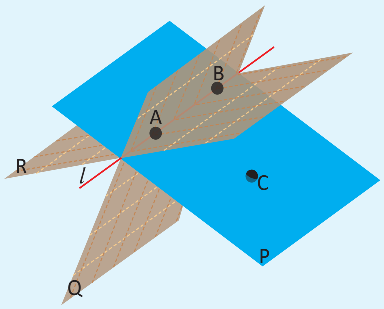
En la imagen se puede observar que la tapa del piano también está sostenida de forma estable por la base con forma de recta y un punto de soporte.

También se puede observar que el piano se mantiene estable con tres puntos de soporte.

C

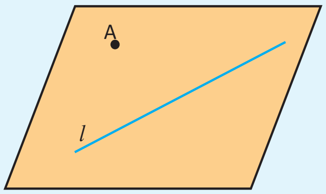
En geometría, un plano es un elemento de dos dimensiones (largo y ancho), pero carece de espesor o altura y se simbolizan con letras mayúsculas como: **P**, **Q**, **R**.

- Por dos puntos pasan muchos planos.
- Por tres puntos que no están en una línea pasa un único plano.

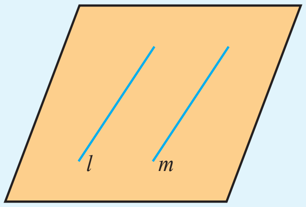


También, un plano queda determinado por:

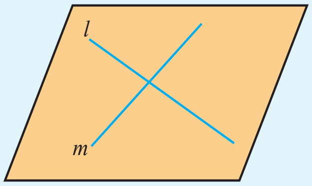
a) Una recta y un punto exterior a la recta.



b) Dos rectas paralelas.



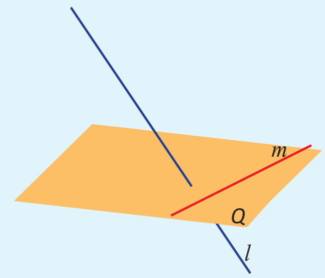
c) Dos rectas secantes que se cortan.



Unidad 8

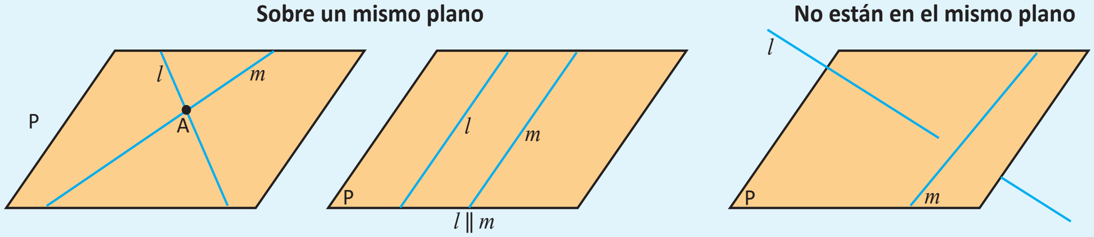
Lección 3

En geometría del espacio, dos rectas que no son paralelas y no se cortan, se dice que están en **posición cruzada** y se llaman **rectas cruzadas**. Así como *l* y *m* en la imagen.



Es decir, la relación de posición de dos líneas rectas en el espacio se puede clasificar como lo siguiente:

Sobre un mismo plano | **No están en el mismo plano**



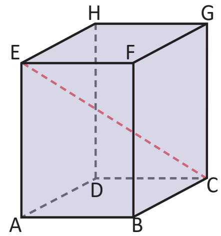
Rectas secantes | **Rectas paralelas** | **Rectas cruzadas**

E

Observa el prisma rectangular y responde:

Qué lados del prisma están sobre rectas que se encuentran en posición cruzada con la recta que pasa por:

a) $\overline{BC}$
b) $\overline{EC}$



El segmento $\overline{EC}$ se dice que es la diagonal del prisma rectangular.

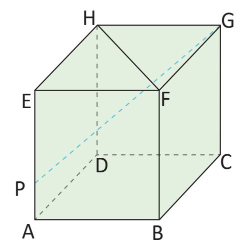
Solución.

a) Los lados: $\overline{AE}$, $\overline{DH}$, $\overline{EF}$, $\overline{GH}$.
b) Los lados $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{DH}$, $\overline{BF}$, $\overline{HG}$ y $\overline{FG}$.

1. Observa el cubo y responde:

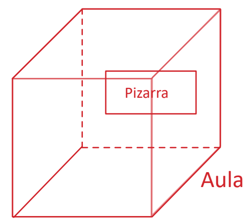
Qué lados están sobre rectas:

a) Secantes a la recta que pasa por $\overline{BC}$.
b) Paralelas a la recta que pasa por $\overline{BC}$.
c) Que se encuentran en posición cruzada con la recta que pasa por $\overline{BC}$.
d) Que se encuentran en posición cruzada con la recta que pasa por $\overline{PG}$.



2. Encuentra líneas rectas y objetos parecidos a planos en tu aula. Describe las relaciones de posición entre ellos, según lo aprendido.

a) ¿Puedes observar objetos sobre rectas paralelas?
b) ¿Puedes observar objetos sobre rectas que se intersectan?
c) ¿Puedes observar objetos sobre rectas cruzadas?



a) Los lados horizontales de la pizarra.
b) Los lados perpendiculares y horizontales de la pizarra.
c) Lado del techo paralelo al lado horizontal de la pizarra y el lado que está a la izquierda o derecha de la pizarra.

Indicador de logro

3.3 Identifica la relación de posición entre rectas y planos.

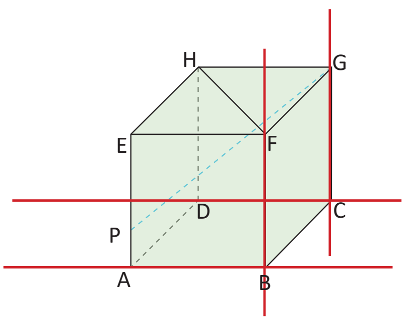
Secuencia

Para esta clase se trabaja la geometría del espacio, introduciendo los planos y la relación de la posición de dos líneas rectas en el espacio. Para los planos se muestra la notación que regularmente tienen y las condiciones para delimitarlos. En el caso de las relaciones de la posición de dos rectas en el espacio se trabajan las rectas secantes, paralelas y en posición cruzada.

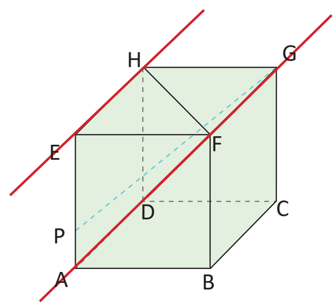
Propósito

Ⓟ, Determinar las rectas que se encuentran en posición cruzada con las rectas que pasan por dos de los lados de un prisma dado. En este punto es importante aclarar que aunque en la Ⓒ se establecen las relaciones de posición entre rectas, estas relaciones son igualmente válidas entre segmentos de recta. Es decir, el lado AE es paralelo al lado FB (siendo que cada lado del prisma es un segmento), teniendo el cuidado de no decir que el lado AE es secante al lado EF porque estos segmentos no se cortan. Lo que sí se cortan son las rectas que pasan sobre dichos segmentos.

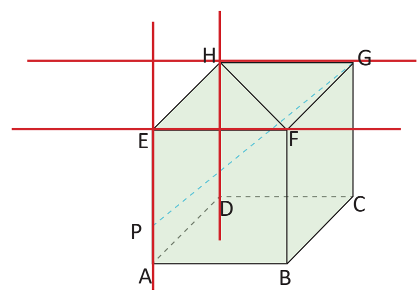
Solución de algunos ítems:



$\overline{AB}$, $\overline{DC}$, $\overline{FB}$, $\overline{GC}$



$\overline{AD}$, $\overline{EH}$ y $\overline{FG}$

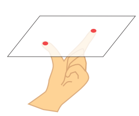


$\overline{AE}$, $\overline{DH}$, $\overline{EF}$ y $\overline{HG}$

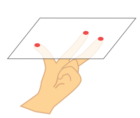
d) $\overline{AD}$, $\overline{EH}$, $\overline{AB}$, $\overline{DC}$, $\overline{DH}$, $\overline{EF}$, $\overline{BF}$ y $\overline{BC}$

Fecha: **U8 3.3**

Ⓟ ¿Cómo sostener una hoja de papel de forma estable, sin desbalance?



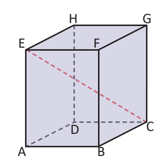
a) Intenta sostenerla utilizando dos dedos.
b) Intenta sostenerla utilizando tres dedos.
c) ¿Con cuál forma, la hoja de papel es más estable?



Ⓢ a) Con dos dedos está en desbalance.
b) Con tres dedos queda firme, sin moverse.
c) Por tanto queda sostenida con tres dedos.

También la tapa del piano (ver LT) está sostenida por su base en forma de recta y un punto de soporte.

Ⓔ Para el prisma rectangular:



Los lados que están sobre rectas que se encuentran en posición cruzada con la recta que pasa por:
a) $\overline{BC}$ son $\overline{AE}$, $\overline{DH}$, $\overline{EF}$, $\overline{GH}$.
b) $\overline{EC}$ son $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{DH}$, $\overline{BF}$, $\overline{HG}$ y $\overline{FG}$.

Ⓡ 1. a) $\overline{AB}$, $\overline{DC}$, $\overline{FB}$, $\overline{GC}$
b) $\overline{AD}$, $\overline{EH}$ y $\overline{FG}$
c) $\overline{AE}$, $\overline{DH}$, $\overline{EF}$ y $\overline{HG}$
d) $\overline{AD}$, $\overline{EH}$, $\overline{AB}$, $\overline{DC}$, $\overline{DH}$, $\overline{EF}$, $\overline{BF}$ y $\overline{BC}$

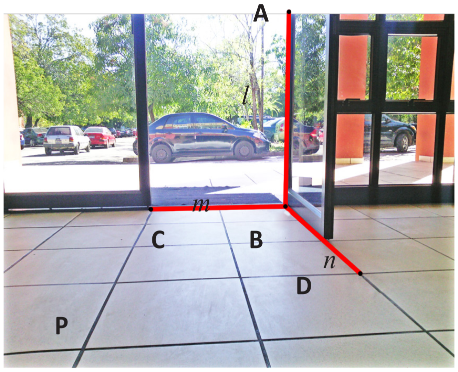
Tarea: página 182 del Cuaderno de Ejercicios.

3.4 Perpendicularidad entre un plano y una recta

P

En la siguiente imagen se muestra una puerta abierta.

a) ¿Qué relación posicional tienen la recta que pasa por AB y la que pasa por BC?
b) ¿Qué relación posicional tienen la recta que pasa por AB y la que pasa por BD?
c) ¿Qué relación tiene la línea recta que pasa por AB con el plano P?



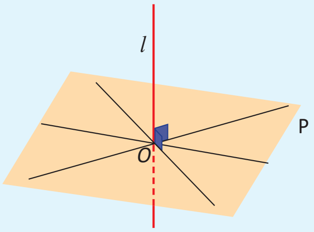
S

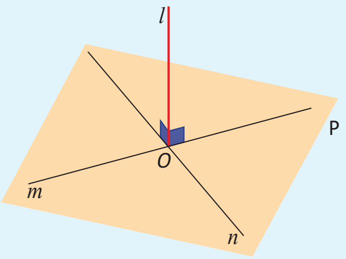
Según lo observado en la imagen:
a) $l \perp m$
b) $l \perp n$
c) $l \perp$ P. Significa que el segmento AB es perpendicular al plano P.

C

Como lo muestra la imagen, la recta l es perpendicular a cualquier línea que está sobre el plano P y que pasa por la intersección de l y el plano P, en la imagen el punto O.

En este caso, se dice que la recta l es perpendicular al plano P.





Si una recta l es perpendicular a un plano P, entonces será perpendicular a todas las rectas que pasan por el punto O que es la intersección entre la recta l y el plano P. Como se muestra en la imagen de la izquierda.

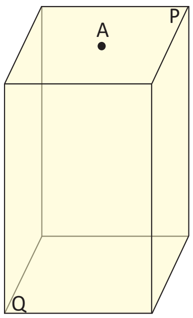
E

En la imagen, hay un punto A sobre el plano P que es una base del prisma rectangular.

¿Cuál es el procedimiento para determinar la distancia del punto A hacia el plano Q?

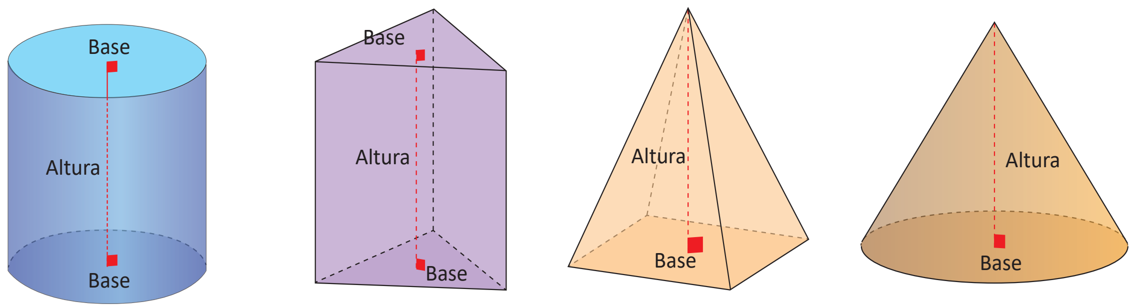
Solución.

Se debe trazar un segmento desde el punto A hacia el plano Q, que está sobre una recta perpendicular al plano Q.



Lección 3

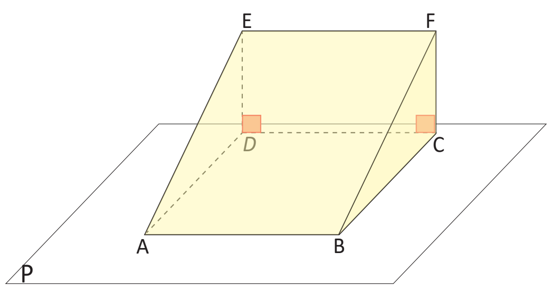
En prismas y cilindros las dos bases son paralelas y se llama altura al segmento que une las dos bases y es perpendicular a ellas. En pirámides y conos, la altura es el segmento que une el vértice y la base es perpendicular a esta última.



Cilindro — Prisma Triangular — Pirámide — Cono

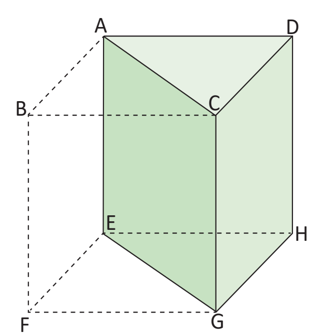
1. En la imagen hay un prisma triangular sobre un plano P:

   a) ¿Qué segmentos son paralelos a $\overline{BC}$?
   b) ¿Qué segmentos están en posición cruzada con $\overline{AE}$?
   c) ¿Qué segmentos son perpendiculares al plano P?
   d) Identifica los lados del prisma que pueden ser la altura tomando como base la cara que cae sobre el plano P.



2. En la imagen hay un prisma triangular dentro de un cubo.

   a) ¿Qué segmentos son paralelos a $\overline{AC}$?
   b) ¿Qué segmentos son perpendiculares a $\overline{DH}$?
   c) Identifica los lados del prisma que pueden ser la altura tomando como base $\overline{GH}$



Indicador de logro

3.4 Determina la distancia entre un punto y un plano.

Secuencia

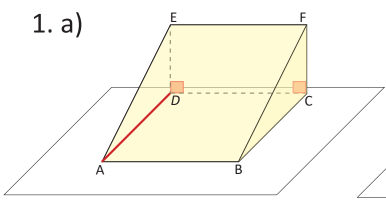
En esta clase se da continuidad al estudio de los planos trabajando con las condiciones de perpendicularidad entre una recta y un plano. Se aprovecha para establecer que las bases de prismas y cilindros son paralelas y se llama **altura** al segmento que une las dos bases y es perpendicular a ellas. En pirámides y conos, la altura es el segmento que une el vértice y la base. Para llegar a las ideas anteriores se parte del procedimiento para determinar la distancia del punto A hacia un plano Q.

Propósito

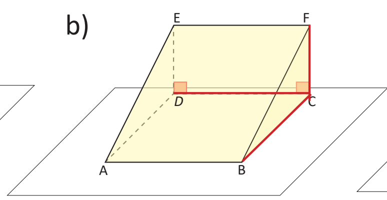
Ⓟ Establecer la condición de perpendicularidad entre una recta y un plano. En este punto es importante establecer que si una recta es perpendicular a dos rectas en el plano P que pasan por el punto de intersección de l y el plano P, entonces l es perpendicular a P. Las propiedades son igualmente válidas al tratarse de un segmento de recta que interseca al plano.

Solución de algunos ítems:

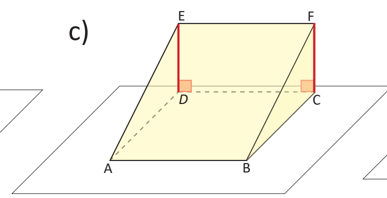
1. a)



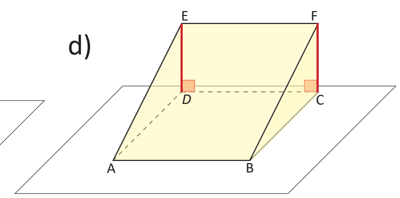
b)



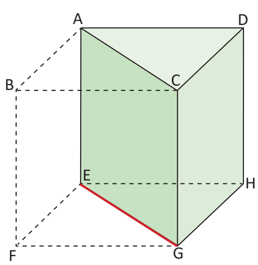
c)



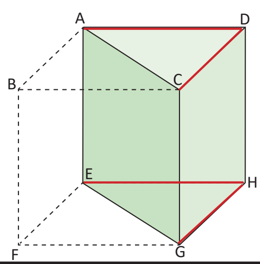
d)



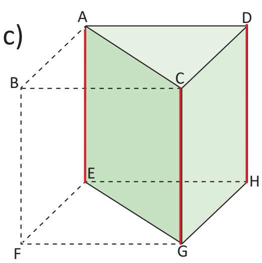
a)



b)



c)

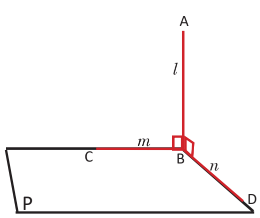


Para la solución se considera el hecho de que el prisma se encuentra al interior de un cubo.

Fecha: **U8 3.4**

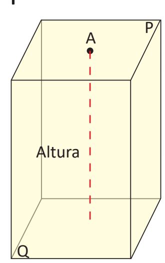
Ⓟ Qué relación posicional tiene la recta que pasa por AB con

a) La recta que pasa por BC
b) La recta que pasa por BD
c) El plano P



Ⓢ Según lo observado en la imagen:
a) $l \perp m$
b) $l \perp n$
c) $l \perp$ P. Significa que el segmento AB es perpendicular al plano P.

Ⓔ En el prisma rectangular, para determinar la distancia del punto A hacia el plano Q se traza un segmento desde A hacia Q, que sea perpendicular a Q.



Ⓡ 1. a) $\overline{AD}$
b) $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{CF}$
c) $\overline{DE}$ y $\overline{CF}$
d) $\overline{DE}$ y $\overline{CF}$

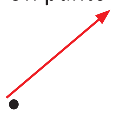
Tarea: página 184 del Cuaderno de Ejercicios.

3.5 Cuerpos geométricos formados por el movimiento de figuras planas

P

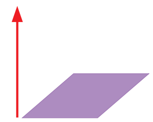
Observa las situaciones presentadas en los literales, cada objeto deja un rastro al desplazarse, según la dirección de la flecha que le acompaña, ¿qué se logra formar en cada caso?

a) Un punto



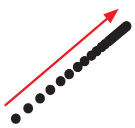
b) Una recta

c) Un plano



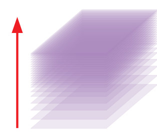
S

a) Se forma una recta



b) Se forma un plano

c) Se forma un prisma

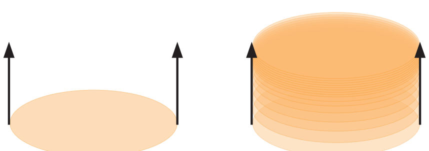


C

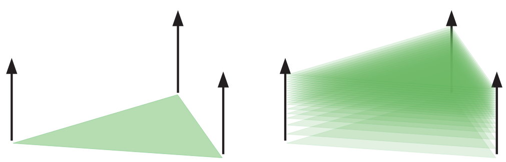
- La unión de infinitos puntos alineados forman una línea recta.
- La unión de infinitas rectas forman un plano.
- La unión de infinitos planos forman un cuerpo geométrico.

E

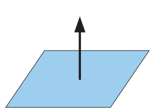
Si se desplaza el círculo verticalmente, como en la imagen, se obtiene un cilindro.

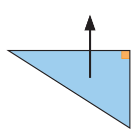


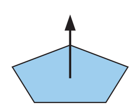
Si se desplaza verticalmente un triángulo, como en la imagen, se forma un prisma triangular.

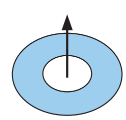


1. Tomando como base las siguientes figuras, dibuja en tu cuaderno, el cuerpo geométrico que se forma al desplazar verticalmente cada figura.

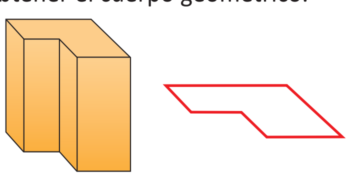
a) 

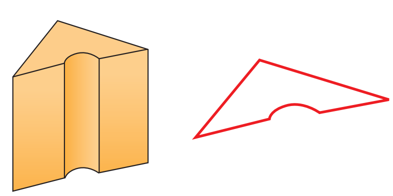
b) 

c) 

d) 

2. En la imagen se observan dos cuerpos geométricos, dibuja la figura que se debe desplazar verticalmente, para lograr obtener el cuerpo geométrico.

a) 

b) 

Unidad 8

Indicador de logro

3.5 Determina cuerpos geométricos formados por el movimiento de figuras planas.

Secuencia

En la clase 3.3 se comenzó a trabajar con planos y anteriormente se trabajó con cuerpos geométricos. De modo que se puede abordar la manera en que se generan planos o cuerpos geométricos a través del desplazamiento de figuras planas.

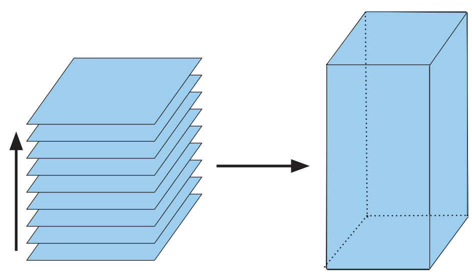
Propósito

Ⓟ, Ⓢ Expresar que el movimiento de un punto en una sola dirección genera un línea recta, y que al mismo tiempo el movimiento de una línea recta en una misma dirección genera un plano y que el movimiento de un plano en una misma dirección genera un cuerpo geométrico.

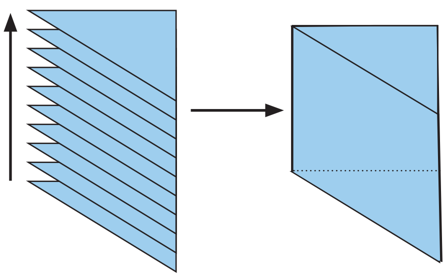
Observación: Siendo rigurosos en la Ⓢ lo que se ha formado es a) semirrecta, b) semiplano y c) semiespacio.

Solución de algunos ítems:

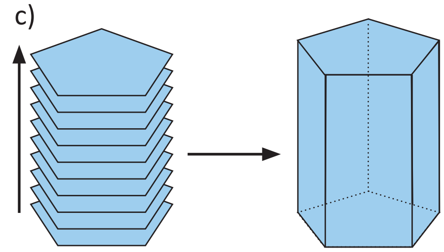
1. a)



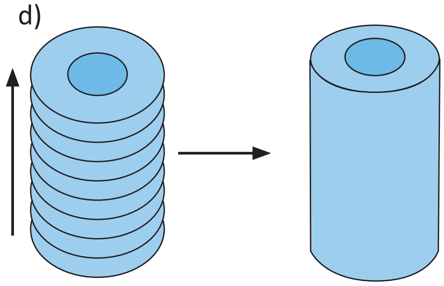
b)



c)



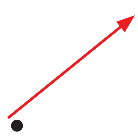
d)



Fecha: **U8 3.5**

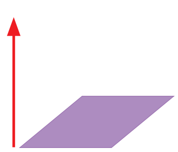
Ⓟ Cada objeto deja un rastro al desplazarse, según la dirección de la flecha que le acompaña. ¿Qué se logra formar en cada caso?

a) Un punto

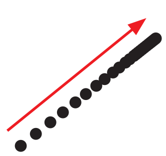


b) Una recta

c) Un plano

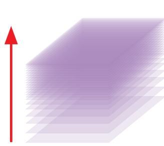


Ⓢ a) Una recta

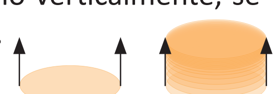


b) Un plano

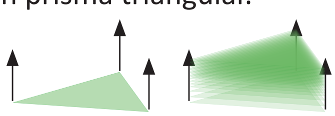
c) Un prisma



Ⓔ Al moverse el círculo verticalmente, se obtiene un cilindro.

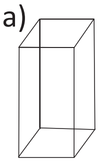


Al moverse verticalmente un triángulo, se forma un prisma triangular.

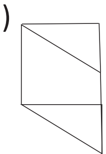


Ⓡ 1.

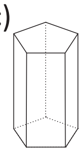
a)



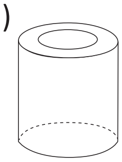
b)



c)



d)

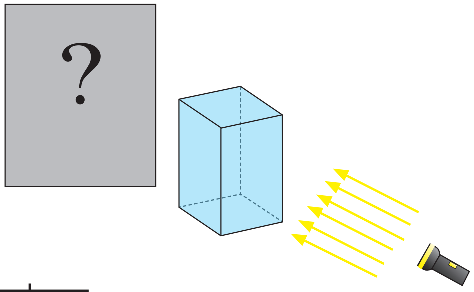


Tarea: página 185 del Cuaderno de Ejercicios.

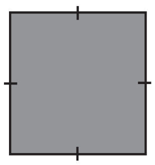
3.6 Proyección ortogonal

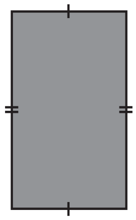
P

En la imagen, la lámpara proyecta rayos de luz que son perpendiculares a la pared gris. Entre la pared y los rayos de luz hay un prisma rectangular de base cuadrada, el cual proyecta una sombra sobre la pared. Según la forma en la que se gira el prisma se pude ver distintas sombras.



¿Cómo debe girarse el prisma para obtener las sombras que se muestran a continuación?

a) 

b) 

S

a) Para obtener esta sombra, el prisma debe girarse de forma que la base que lo sostiene quede frente a la pared.

b) Para obtener la sombra el prisma debe estar en la posición inicial que muestra la imagen.

C

La **proyección ortogonal** de un cuerpo es aquella donde las rectas proyectantes son perpendiculares al plano de proyección.

Si se tiene un prisma encerrado en tres paredes, considerando las paredes como planos, se puede dibujar la proyección ortogonal a cada uno de ellos como figuras planas, como lo muestra la imagen 3.

Se consideran tres tipos de perspectivas: **vista frontal**, **vista lateral** y **vista sobre el piso**.

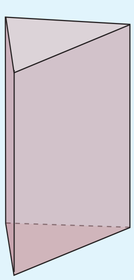


Imagen 1

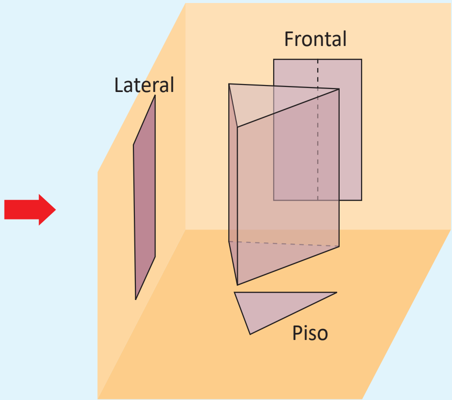


Imagen 2

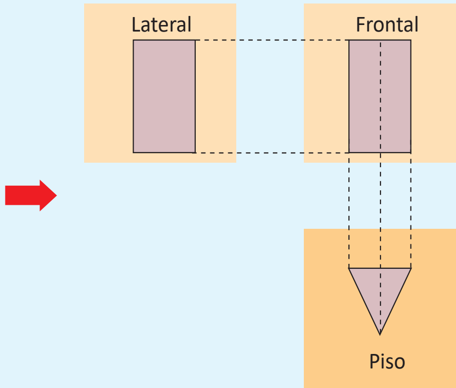
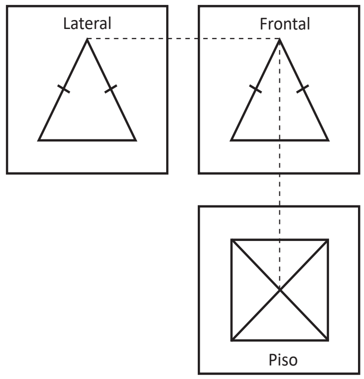


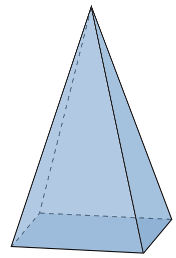
Imagen 3

Dibuja en tu cuaderno el cuerpo geométrico que corresponde a la proyección ortogonal mostrada y escribe el nombre del sólido.



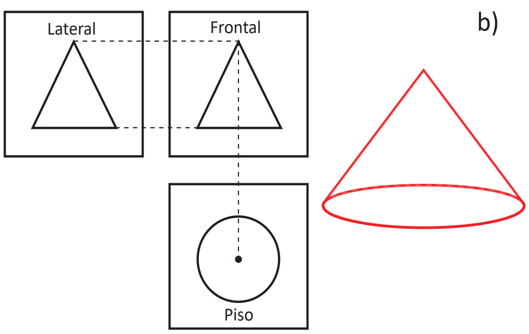
Solución.
Observando las imágenes, la perspectiva lateral y frontal son triángulos isósceles. Además, la perspectiva sobre el piso es un cuadrado con sus diagonales. Las líneas punteadas unen los vértices que coinciden.

Por tanto, la figura es una pirámide.

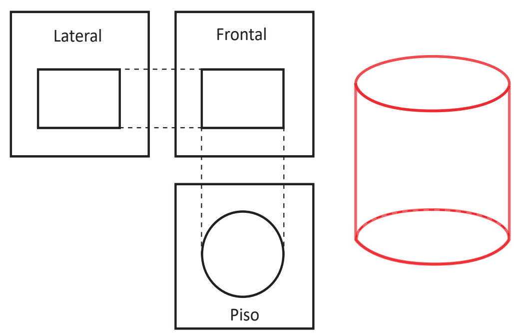

Pirámide

1. Dibuja en tu cuaderno el cuerpo geométrico que generan la siguientes proyecciones ortogonales.

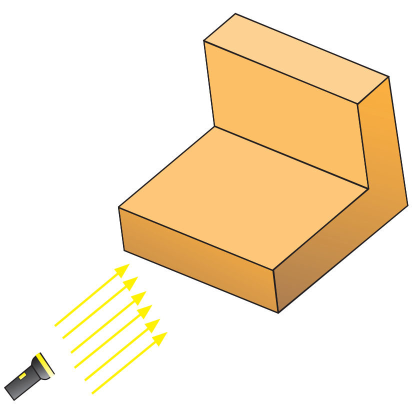
a)

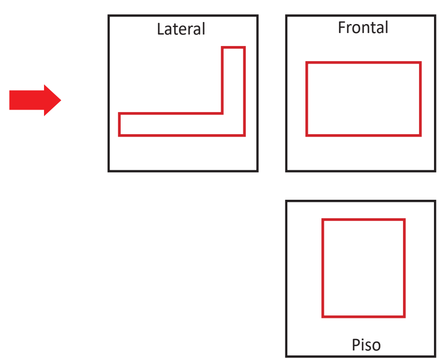


b)



2. Dibuja la proyección ortogonal de la siguiente figura.





Indicador de logro

3.6 Identifica el cuerpo geométrico observando la figura proyectada ortogonalmente.

Secuencia

En las tres clases anteriores se trabajó con planos, por lo tanto los estudiantes ya están familiarizados con ellos. De manera que en esta clase se aborda la proyección ortogonal de un cuerpo geométrico en diferentes planos. Para el caso se introducen los conceptos de **rectas proyectantes** y **plano de proyección**.

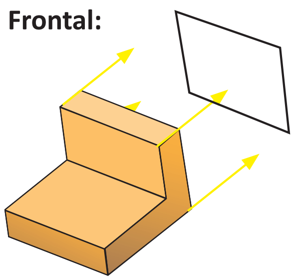
Propósito

Ⓟ, Ⓢ Determinar la proyección de un cuerpo geométrico en tres planos (vista frontal, vista lateral y vista del piso). Ⓒ Determinar el cuerpo geométrico proyectado a partir de sus proyecciones en los planos representados por la vista lateral, vista frontal y vista sobre el piso. En el Ⓟ se hace la proyección del cuerpo geométrico en tres planos, mientras que en el Ⓔ se determina el cuerpo geométrico a partir de sus proyecciones en tres planos.

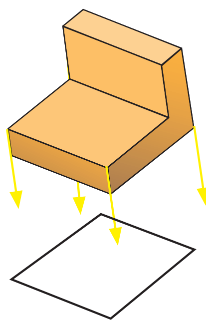
Solución de algunos ítems:

2.

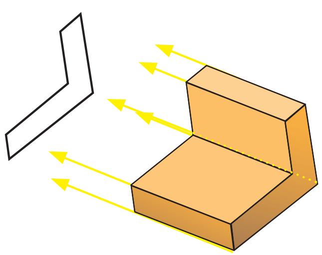
Frontal:

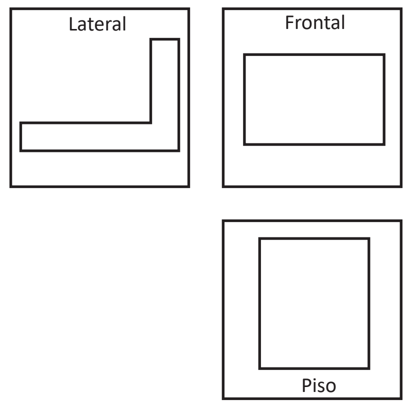


Piso:



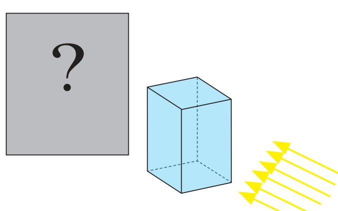
Lateral:



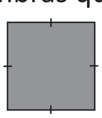


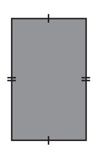
Fecha: **U8 3.6**

Ⓟ



¿Cómo debe girarse el prisma para obtener las sombras que se muestran?

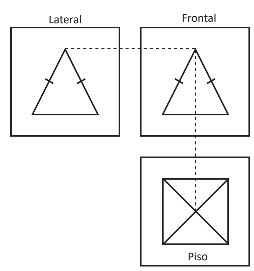
a) 

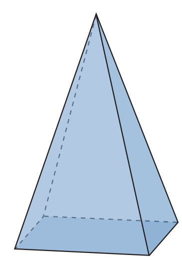
b) 

Ⓢ a) El prisma debe girarse de forma que la base que lo sostiene quede frente a la pared.

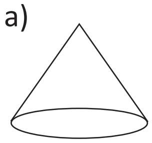
b) El prisma debe estar en la posición inicial que muestra la imagen.

Ⓔ

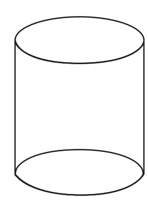




Ⓡ 1. a)



b)

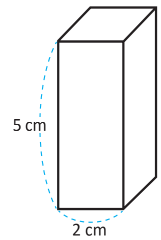


Tarea: página 186 del Cuaderno de Ejercicios.

3.7 Desarrollo plano de un prisma y su área total

P

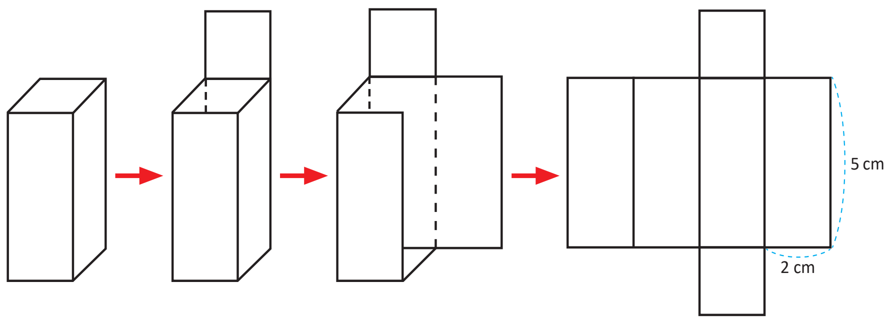
Encuentra el área total de la superficie del prisma cuadrangular.



Se le llama superficie a la parte más externa del cuerpo geométrico.

S

Como se muestra en la imagen, se puede descomponer el prisma cuadrangular como si fuese de papel.



La imagen final muestra el desarrollo plano del cuerpo geométrico. La figura está formada por 4 rectángulos congruentes y 2 cuadrados también congruentes, que son las bases del prisma.

El área de un rectángulo es: $5 \times 2 = 10$ cm^2.
El área de un cuadrado es: $2 \times 2 = 4$ cm^2.

Por tanto, el área total de la superficie es: $\underbrace{10 \times 4}_{\text{Área lateral}} + \underbrace{4 \times 2}_{\text{Área de las bases}} = 40 + 8 = \underbrace{48}_{\text{Área total}}$ cm^2.

C

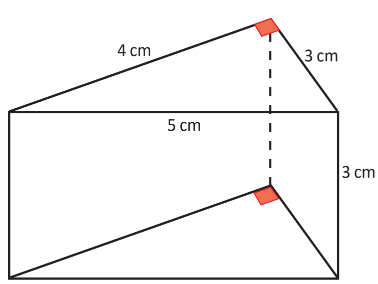
El área total de cualquier prisma puede obtenerse con la siguiente relación:

$$\mathbf{A}_T = \mathbf{A}_l + \mathbf{A}_b$$

Donde $\mathbf{A}_l$: Área lateral y $\mathbf{A}_b$: Área de la base.

E

Encuentra el área total del prisma triangular:

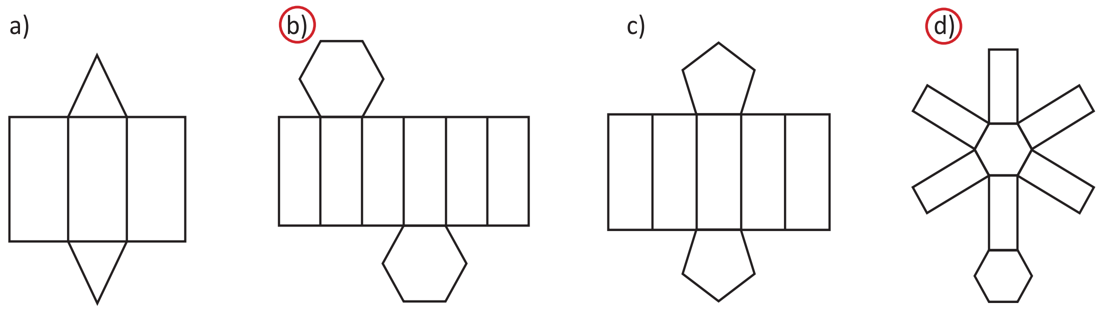


Solución.

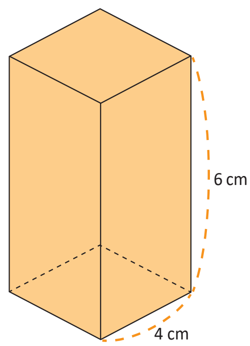
El área total del prisma se puede calcular con: $\mathbf{A_T = A_l + A_b}$.

$$\mathbf{A_l} = 5 \times 3 + 4 \times 3 + 3 \times 3 = 15 + 12 + 9 = 36$$
$$\mathbf{A_b} = 4 \times 3 \div 2 + 4 \times 3 \div 2 = 6 + 6 = 12$$
$$\mathbf{A_T} = 36 + 12 = 48 \text{ cm}^2$$

1. ¿Con cuál de los siguientes planos desarrollados se puede lograr construir un prisma hexagonal?



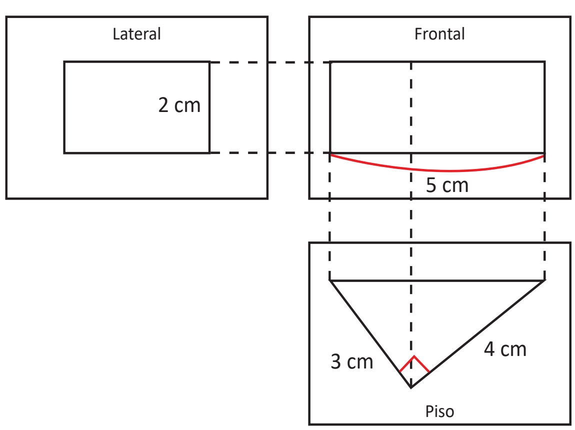
2. Encuentra el área total del prisma con base cuadrada.
   Área total: 128 cm²



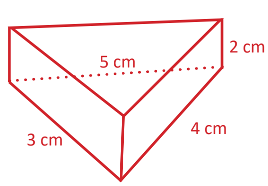
3. La imagen muestra la proyección ortogonal de un prisma triangular recto.

   a) Dibuja en tu cuaderno la figura que se forma con las medidas dadas.

   b) Encuentra el área total del prisma formado.



a)



b) 36 cm²

Indicador de logro

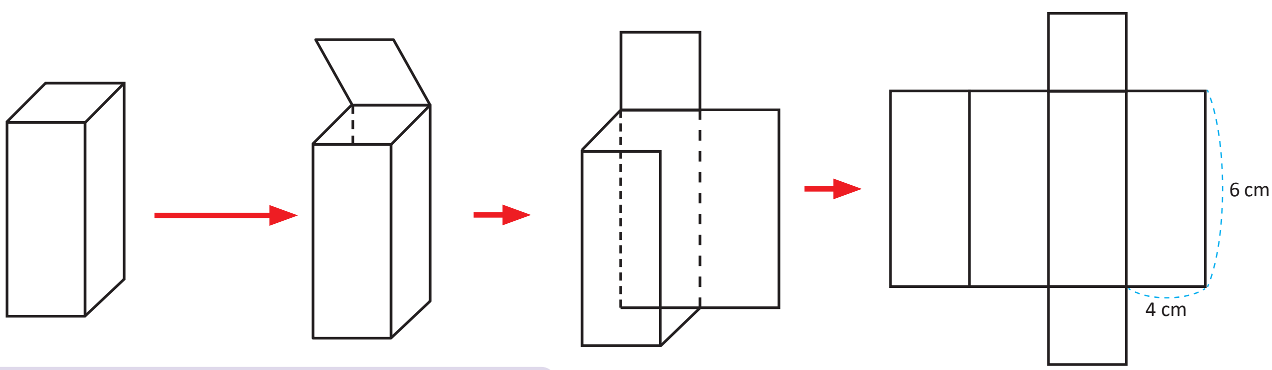
3.8 Calcula el área total de un prisma a partir de su plano desarrollado.

Secuencia

Los estudiantes ya han construido patrones de cubos, prismas rectangulares y triangulares, también trabajaron la identificación del patrón de un cubo de un conjunto de patrones dados. En esta clase se introduce el concepto del **desarrollo plano**, específicamente del prisma, que es equivalente a los **patrones** de prismas que en grados anteriores se construyeron. También se estudia la relación que permite calcular el área total de un prisma, deducida a partir del desarrollo plano de un prisma en particular.

Propósito

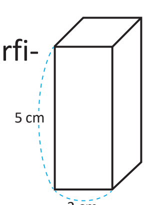
Ⓟ, Aplicar la fórmula para calcular el volumen de un prisma. En este punto se calcula el área total de un prisma pero a diferencia del presentado en el Ⓟ es un prima triangular.



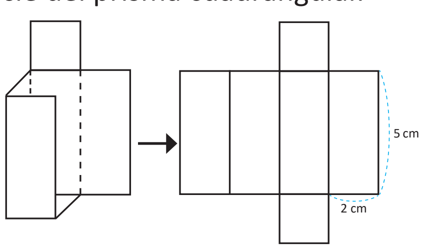
Para la verificación del indicador de logro, se deberá realizar el ítem 2 primero en función del tiempo, posteriormente se harán los ejercicios 1 y 3 que sirven como repaso de las clases anteriores.

Fecha: **U8 3.7**

Ⓟ Encuentra el área total de la superficie del prisma cuadrangular.

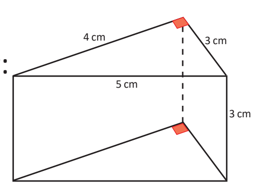


Ⓢ



La figura está formada por 4 rectángulos congruentes y 2 cuadrados también congruentes.
El área de un rectángulo es: $5 \times 2 = 10$ cm^2
El área de un cuadrado es: $2 \times 2 = 4$ cm^2
Por tanto, el área total de la superficie es:
$10 \times 4 + 4 \times 2 = 40 + 8 = 48$ cm^2

Ⓔ Para el prisma triangular:



Su área total se calcula como:

$$A_l = 5 \times 3 + 4 \times 3 + 3 \times 3$$
$$= 15 + 12 + 9$$
$$= 36$$
$$A_b = 4 \times 3 \div 2 + 4 \times 3 \div 2$$
$$= 6 + 6$$
$$= 12$$
$$A_T = A_l + A_b = 36 + 12 = 48 \text{ cm}^2$$

Ⓡ 1. b y d
2. 128 cm^2

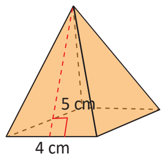
Tarea: página 187 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 3

3.8 Desarrollo plano de una pirámide y su área total

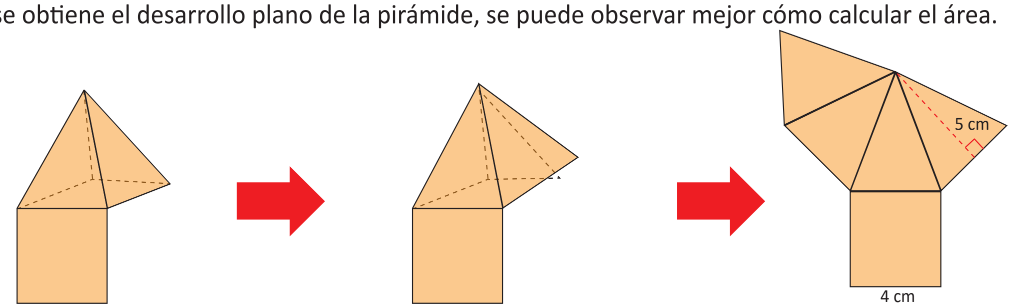
P

La imagen muestra una pirámide de base cuadrada.
Encuentra el área total de la superficie de la pirámide.



S

Si se obtiene el desarrollo plano de la pirámide, se puede observar mejor cómo calcular el área.



La pirámide está formada por 4 caras que son triángulos isósceles congruentes entre sí y por un cuadrado como base.

Área de un triángulo: $4 \times 5 \div 2 = 20 \div 2 = 10$ cm^2
Área lateral: $A_l = 10 \times 4 = 40$ cm^2
Área de la base: $A_b = 4 \times 4 = 16$ cm^2
Área total: $A_T = A_l + A_b = 40 + 16 = 56$ cm^2

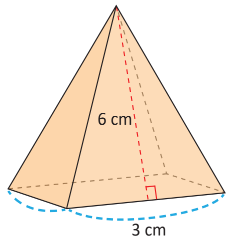
C

El área total de cualquier pirámide puede obtenerse con la siguiente relación:

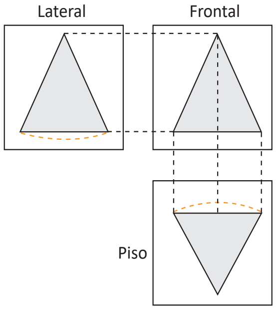
$$\mathbf{A_T = A_l + A_b}$$

Donde $\mathbf{A_l}$: Área lateral y $\mathbf{A_b}$: Área de la base.

1. Encuentra el área total de la siguiente pirámide con base cuadrada.
   Área total: 45 cm^2.



2. En la imagen de la derecha se observa la proyección ortogonal de una figura: Dibuja el cuerpo geométrico que se forma.



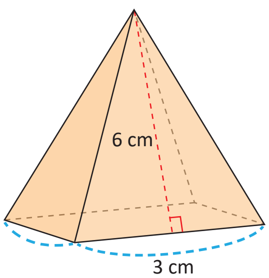
Indicador de logro

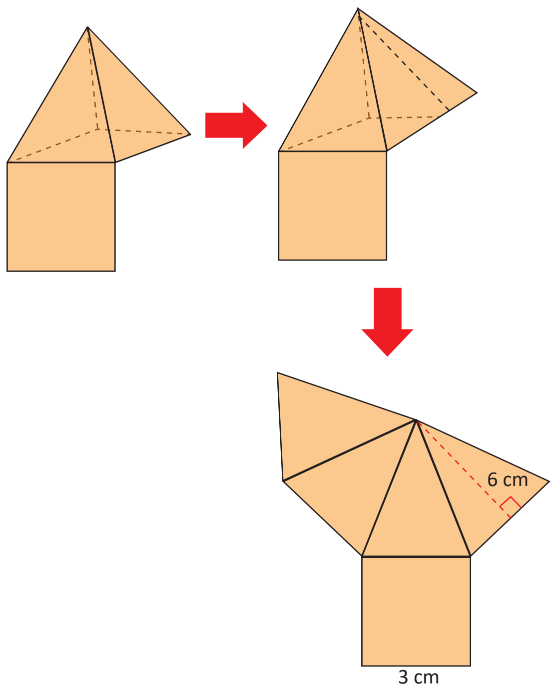
3.9 Calcula el área total de una pirámide a partir de su plano desarrollado.

Secuencia

Anteriormente se trabajó el desarrollo plano y el cálculo del área total de un prisma. En esta clase se retoman esos temas para ser aplicados a una pirámide. Al igual que en la clase anterior la relación que permite hacer el cálculo del área total es deducida a partir de una pirámide en particular.

Solución de algunos ítems:





$\mathbf{A_T = A_l + A_b}$

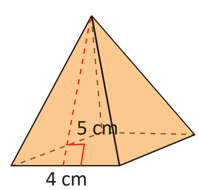
$\mathbf{A_l} = 3 \times 6 \div 2 \times 4$
$= 36$

$\mathbf{A_b} = 3 \times 3$
$= 9$

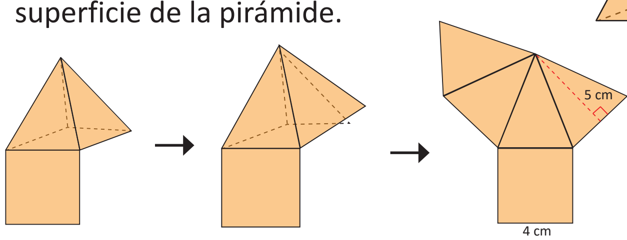
$\mathbf{A_T} = 36 + 9 = 45 \text{ cm}^2$

Fecha: **U8 3.8**

Ⓟ La imagen muestra una pirámide de base cuadrada. Encuentra el área total de la superficie de la pirámide.



Ⓢ



La pirámide está formada por 4 caras que son triángulos isósceles congruentes entre sí y por un cuadrado como base.

Área de un triángulo: $4 \times 5 \div 2 = 20 \div 2 = 10 \text{ cm}^2$

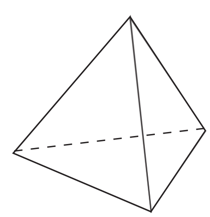
Área lateral: $10 \times 4 = 40 \text{ cm}^2$

Área de la base: $4 \times 4 = 16 \text{ cm}^2$

Área total: $40 + 16 = 56 \text{ cm}^2$

Ⓡ 1. 45 cm^2

2.

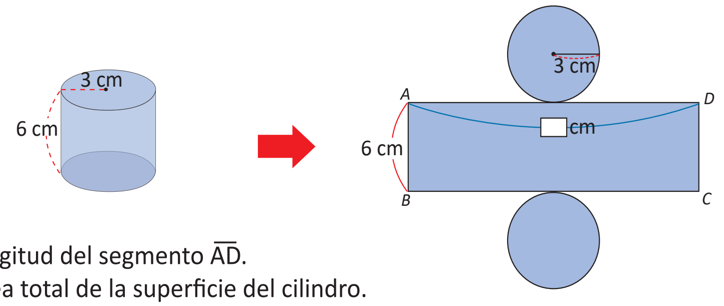


Tarea: página 189 del Cuaderno de Ejercicios.

3.9 Desarrollo plano de un cilindro y su área total

P

Se ha obtenido el desarrollo plano del cilindro con las medidas mostradas en la imagen:



a) Encuentra la longitud del segmento $\overline{AD}$.
b) Encuentra el área total de la superficie del cilindro.

S

a) La longitud del segmento $\overline{AD}$ coincide con la longitud de la circunferencia sobre él. Esta se puede obtener utilizando la fórmula para la longitud de la circunferencia: $l_c = 2\pi r$.

Por tanto: AD = 2π × 3 = 6π cm.

b) El área total del cilindro está formada por el área de las bases más el área lateral, la cual es el área del rectángulo.

Área de las bases: $A_b = 2\pi \times 3 \times 3 = 18\pi$ cm^2
Área del rectángulo: $A_l = \overline{AD} \times \overline{AB} = 6\pi \times 6 = 36\pi$ cm^2
Área total: $A_T = 18\pi + 36\pi = 54\pi$ cm^2

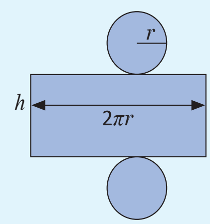
C

El área total de un cilindro se puede obtener mediante la relación:

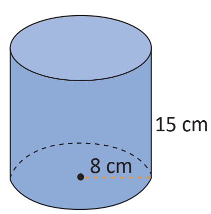
Área total de un cilindro = Área de las bases + Área lateral

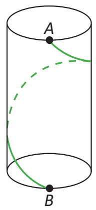
$$A_T = A_b + A_l$$
$$\mathbf{A_T = 2\pi r^2 + 2\pi r \times h}$$

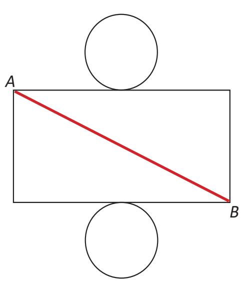
Donde r, es el radio del círculo y h, es la altura del cilindro.



1. Encuentra el área total del cilindro.
   Área total: 368π cm^2







2. Según la imagen, se ha enrollado un hilo desde A hacia B a lo largo del cilindro. Si se obtiene el desarrollo plano del cilindro:

   Dibuja cómo quedaría el hilo en el desarrollo plano.

Unidad 8

Indicador de logro

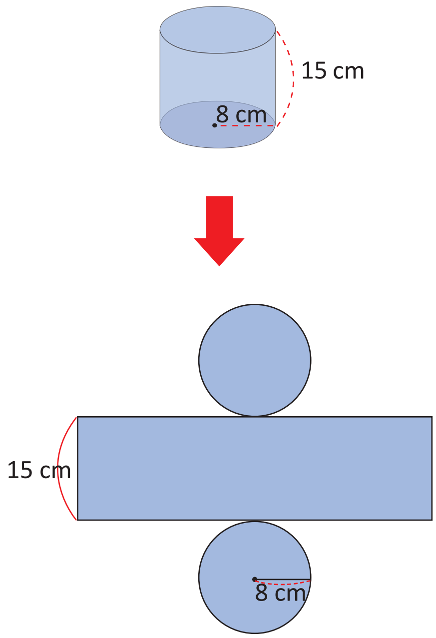
3.9 Calcula el área total de un cilindro a partir de su plano desarrollado.

Secuencia

En las dos clases anteriores se trabajó con el desarrollo plano de poliedros, por lo que ahora se trabajará el desarrollo plano del cilindro, que es uno de los cuerpos redondos presentados en la clase 3.1. Al igual que se hizo con los poliedros, se presenta la relación que se usa para el cálculo del área total de un cilindro. La relación se deduce a partir de un cilindro en particular.

Solución de algunos ítems:

1.



Entonces:
r: 8 cm y h: 15 cm

$\mathbf{A}_T = \mathbf{A}_l + \mathbf{A}_b$

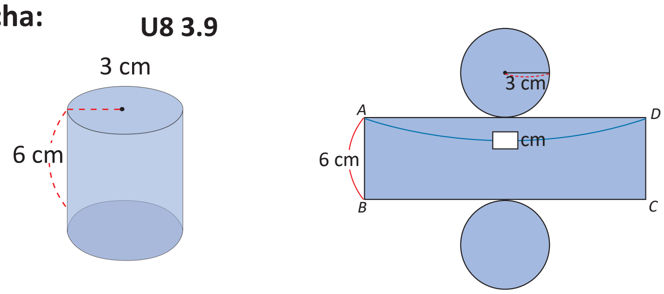
$\mathbf{A}_l = 2\pi \times 8 \times 15$
$= 240\pi$

$\mathbf{A}_b = \pi \times 8^2 \times 2$
$= 128\pi$

$\mathbf{A}_T = 240\pi + 128\pi = 368\pi\ \text{cm}^2$

Fecha: **U8 3.9**

Ⓟ

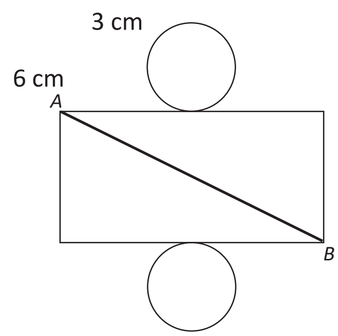


a) Encuentra la longitud del segmento $\overline{AD}$.
b) Encuentra el área total de la superficie del cilindro.

Ⓢ a) La longitud del segmento $\overline{AD}$ es igual a la de la circunferencia sobre él. Por tanto: AD = $2\pi \times 3 = 6\pi$ cm.
b) Área de las bases: $A_b = \pi \times 3 \times 3 \times 2 = 18\pi\ \text{cm}^2$
Área del rectángulo: $A_l = \overline{AD} \times \overline{AB} = 6\pi \times 6 = 36\pi\ \text{cm}^2$
Área total: $A_T = 18\pi + 36\pi = 54\pi\ \text{cm}^2$

Ⓡ 1. $368\pi\ \text{cm}^2$

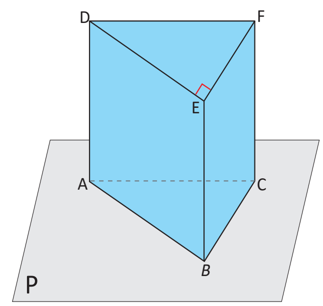
2.



Tarea: página 191 del Cuaderno de Ejercicios.

3.10 Practica lo aprendido

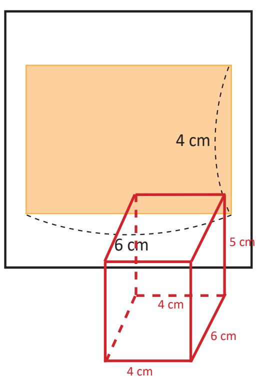
1. En la imagen se encuentra un prisma triangular sobre un plano P. Según lo que se observa en la imagen, responde:

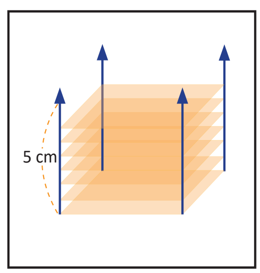


   a) ¿Qué segmentos son paralelos a $\overline{AB}$? $\overline{DE}$
   b) ¿Qué segmentos son perpendiculares a $\overline{ED}$? $\overline{EF}$, $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$
   c) ¿Qué segmentos del prisma están en posición cruzada con la recta que pasa por AB? $\overline{DF}$, $\overline{EF}$ y $\overline{FC}$
   d) ¿Qué segmentos son perpendiculares al plano P?
   $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{FC}$

2. Para cada literal, dibuja en tu cuaderno el cuerpo geométrico formado, al desplazar la figura verticalmente y encuentra el área total del cuerpo.

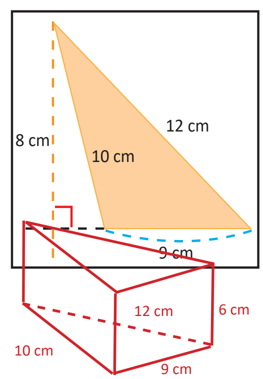
a)

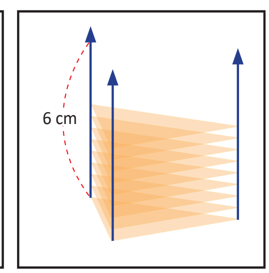




Área total: 168 cm²

b)

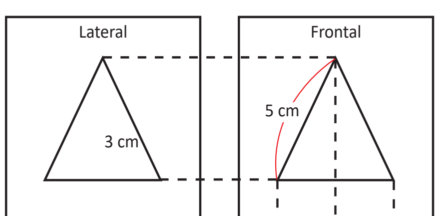


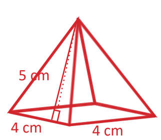


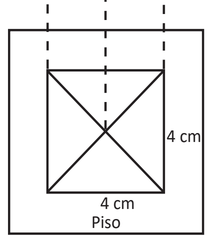
Área total: 258 cm²

3. En las siguientes proyecciones ortogonales dibuja en tu cuaderno el cuerpo formado y encuentra su área total.

a)

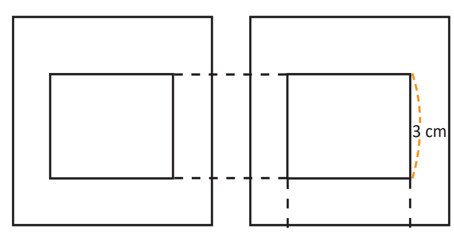


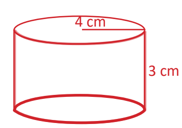


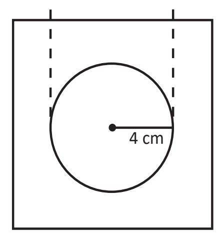


Área total: 56 cm²

b)





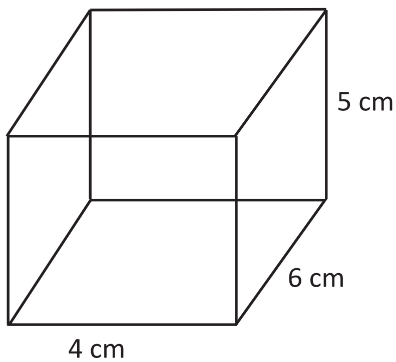


Área total: 56π cm²

Indicador de logro

3.10 Resuelve problemas correspondientes a planos, cuerpos geométricos y área total del prisma, pirámide y cilindro.

2\. a)



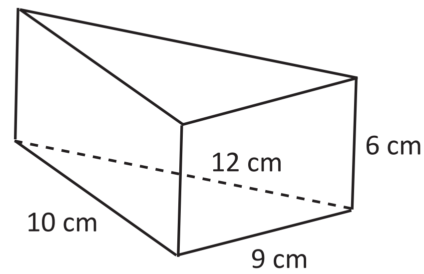
$\mathbf{A}_T = \mathbf{A}_l + \mathbf{A}_b$

$\mathbf{A}_l = 5 \times 6 \times 4$
$= 120$

$\mathbf{A}_b = 4 \times 6 \times 2$
$= 48$

$\mathbf{A}_T = 120 + 48 = 168$ cm^2

b)



$\mathbf{A}_T = \mathbf{A}_l + \mathbf{A}_b$

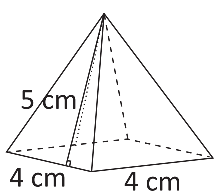
$\mathbf{A}_l = 10 \times 6 + 12 \times 6 + 9 \times 6$
$= 186$

Por los datos presentados en el planteamiento del ejercicio, se tiene que la altura de los triángulos que forman las bases es 8 cm.

$\mathbf{A}_b = 9 \times 8 \div 2 \times 2$
$= 72$

$\mathbf{A}_T = 186 + 72 = 258$ cm^2

3\. a)

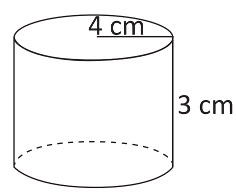


$\mathbf{A}_l = 4 \times 5 \div 2 \times 4$
$= 40$

$\mathbf{A}_b = 4 \times 4$
$= 16$

$\mathbf{A}_T = 40 + 16 = 56$ cm^2

b)



$\mathbf{A}_l = \pi \times 8 \times 3$
$= 24\pi$

$\mathbf{A}_b = \pi \times 4^2 \times 2$
$= 32\pi$

$\mathbf{A}_T = 24\pi + 32\pi = 56\pi$ cm^2

Tarea: página 192 del Cuaderno de Ejercicios.

Indica a los estudiantes que para la siguiente clase deben contar con su estuche de colores y estuche de geometría.

Anexos

Pruebas

Se proporcionan las pruebas de cada unidad, trimestre y final, para que los docentes las fotocopien y apliquen a los estudiantes cuando corresponda.

MI NUEVA ESCUELA
Reforma Educativa

GOBIERNO DE EL SALVADOR

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

7

Matemática y Datos

Guía metodológica Tomo 2